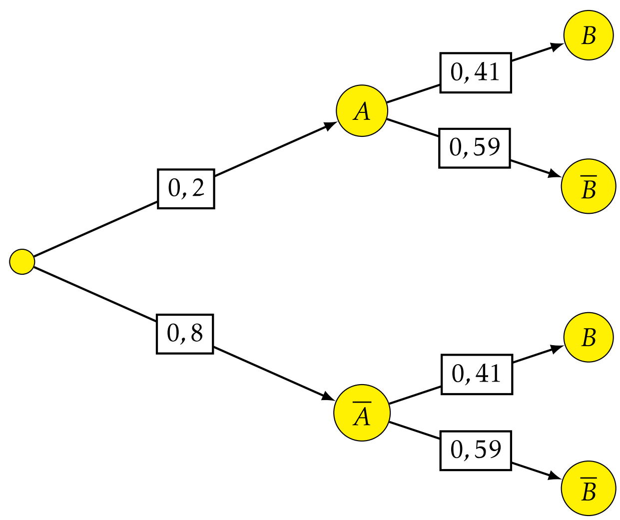
Nom :	**DS 08**	TSTI2D1 — *Mars 2022*
Prénom :		*Devoir n° 08* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *0 point*

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité :



1 Donner les valeurs des probabilités : $p_A(B)$, $p(A \cap B)$.
A partir de l'arbre, on déduit $p_A(B) = 0,41$, et $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,2 \times 0,41 = 0,082$

$$\boxed{p_A(B) = 0,41 \text{ et } p(A \cap B) = 0,082}$$

2 Calculer $p(B)$.
En utilisant la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) \\ &= 0,082 + 0,8 \times 0,41 \\ &= 0,082 + 0,0,328 \\ &= 0,41 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(B) = 0,41}$$

3 Montrer que les événements A et B sont indépendants. On a :

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= 0,082 \\ p(A) \times p(B) &= 0,2 \times 0,41 \\ &= 0,082 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ayant } p(A \cap B) = p(A) \times p(B), A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$$

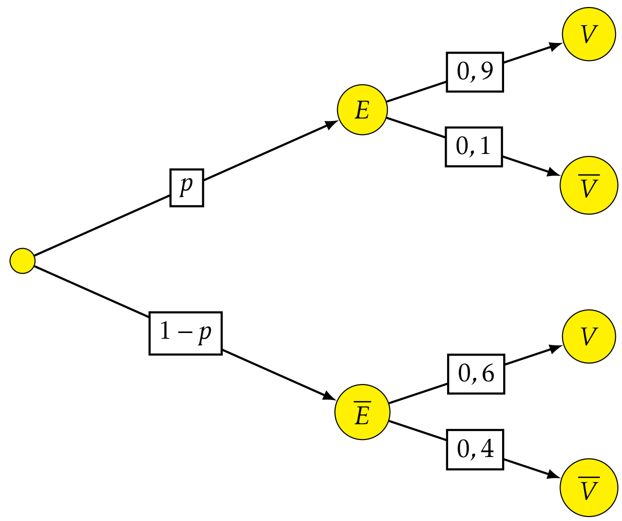
Exercice 2 **0 point**

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1 Construire l'arbre pondéré représentant la situation.



2 Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(E \cap V) + P(\overline{E} \cap V) \\ &= P(E) \times P_E(V) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(V) \\ &= p \times 0,9 + (1-p) \times 0,6 \\ &= 0,9p + 0,6 - 0,6p \\ &= 0,3p + 0,6 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } P(V) = 0,3p + 0,6}$$

3 On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

a. Calculer la valeur de p.
D'après l'énoncé, $P(V) = 0,675$.

$$\begin{aligned} P(V) = 0,675 &\iff 0,3p + 0,6 = 0,675 \\ &\iff 0,3p = 0,075 \\ &\iff p = 0,25 \end{aligned}$$

$$\boxed{p = 0,25}$$

b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.
On veut ici calculer $P_V(E)$.
D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\begin{aligned} P_V(E) &= \frac{P(V \cap E)}{P(V)} \\ &= \frac{0,25 \times 0,9}{0,675} \\ &= \frac{25 \times 9}{675} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$P_V(E) = \dfrac{1}{3}$, donc sachant que Romane s'est déplacée en vélo, la probabilité que la journée soit ensoleillée est bien $\frac{1}{3}$.

Exercice 3 — 3,5 points

Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x) - x\cos(x) + 3}{(\sin(x)+3)^2} \text{ et } F(x) = \frac{x+1}{\sin(x)+3}$$

2 pts **1** Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ ssi $F' = f$.
On calcule $F'(x)$.
Ici $F = \dfrac{u}{v}$, donc $F' = \dfrac{u'v - v'u)}{v^2}$

$\begin{cases} u(x) &= x+1 \\ v(x) &= \sin x + 3 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \cos x \end{cases}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1(\sin x + 3) - \cos x(x+1)}{(\sin x + 3)^2} \\ &= \frac{\sin x + 3 - x\cos x - \cos x}{(\sin x+3)^2} \\ &= \frac{\sin(x) - \cos(x) - x\cos(x) + 3}{(\sin(x)+3)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Comme $F'(x) = f(x)$, on a bien prouvé que F est une primitive de f.

1.5 pt **2** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = F(\pi) - F(0)$$

$$F(\pi) = \frac{\pi+1}{\sin(\pi)+3} = \frac{\pi+1}{3} \qquad F(0) = \frac{0+1}{\sin(0)+3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi+1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}}$$

Exercice 4 — 10 points

10 pts

On calcule des intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

☞ $A = \int_0^1 (2x+1)dx$
On pose $f(x) = 4x+3$
Soit F, une primitive de f.
$F(x) = x^2 + x$
$A = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0)$
$F(1) = 1+1 = 2$ et $F(0) = 0$.

$$\boxed{A = \int_0^1 (2x+1)dx = 2}$$

☞ $B = \int_1^2 (4x^3+4x+2)dx$ On pose $f(x) = 4x^3+4x+2$
Soit F, une primitive de f.
$F(x) = x^4 + 2x^2 + 2x$
$A = \int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1)$
$F(2) = 2^4 + 2\times 2^2 + 2\times 2 = 16+8+4 = 28$ et $F(1) = 5$.

$$\boxed{B = \int_1^2 (4x^3+4x+2)dx = 23}$$

☞ $C = \int_0^\pi (2\cos x - \sin x)dx$
On pose $f(x) = 2\cos x - \sin x$
Soit F, une primitive de f.
$F(x) = 2\sin x + \cos x$
$C = \int_0^\pi f(x)dx = F(\pi) - F(0)$
$F(\pi) = 2\sin(\pi) + \cos(\pi) = 2\times(0) + (-1) = -1$ et $F(0) = 2\sin(0) + \cos 0) = 1$.

$$\boxed{C = \int_0^\pi (2\cos x - \sin x)dx = -2}$$

☞ $D = \int_{-1}^2 (4x+4)^4 dx$
$f(x) = (4x+4)^4$
En posant $u = 4x+4$, on a $u' = 4$, on peut donc écrire $f = u^4 \times \frac{u'}{4} = \frac{1}{4}u^4u'$.
Ainsi F une primitive de f est définie par $F = \frac{1}{4} \times \frac{u^{4+1}}{4+1} = \frac{1}{4} \times \frac{u^5}{5} = \frac{1}{20}u^5$
$D = \int_{-1}^2 (4x+2)^3 dx = F(2) - F(-1)$
$F(2) = \frac{1}{20} \times 12^5$ et $F(-1) = \frac{1}{20} \times (0)^5 = 0$

$$\boxed{D = \int_{-1}^2 (4x+4)^4 dx = 12\ 441,6}$$

☞ $E=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x+\pi)\,dx$

$f(x)=\cos(3x+\pi)=-\cos(3x)$

$F(x)=-\dfrac{1}{3}\sin(3x)$

$E=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x+\pi)\,dx=F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$E=F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}\sin(\pi)=0$ et $=F\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}\sin(\dfrac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{3}$

$$\boxed{E=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x+\pi)\,dx=\frac{1}{3}}$$