| | | |
|---|---|---|
| *Nom :* ........................ <br> *Prénom :* ........................ | **DS 04** | TSTI2D2 · *Déc. 2020* <br> *Devoir n° 07* ...../... |

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.* ***Faites des phrases claires et précises****.*
*Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.*

**Attention ! Le sujet est recto-verso.**

## *Exercice 1* — *3,5 points*

3.5 pts Je connais mon cours !

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ ;
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ ;
- $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$ ;
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$

## *Exercice 2* — *3 points*

3 pts

Exprimer en fonction de $\ln 3$ les expressions suivantes. Chaque étape sera justifiée rigoureusement en citant les propriétés utilisées.

**1** $A = 2\ln(9) - 5\ln(3)$

$$\begin{aligned} A = 2\ln(9) - 5\ln(3) &= 2\ln(3^2) - 5\ln(3) \\ &= 2\times 2\ln(3) - 5\ln(3) \quad \text{car } \ln\left(x^2\right) = 2\ln(x) \\ &= 4\ln(3) - 5\ln(3) \\ &= -\ln(3) \end{aligned}$$

$$\boxed{A = -\ln(3)}$$

**2** $B = 3|n\left(\frac{1}{9}\right) + 2\ln(27)$

$$\begin{aligned} B = 3|n\left(\frac{1}{9}\right) + 2\ln(27) & \\ &= 3(-\ln(9)) + 2\ln(3^3) \quad \text{car } \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\ln(x) \\ &= 3\left(-\ln(3^2)\right) + 2\times 3\ln(3) \quad \text{car } \ln\left(x^3\right) = 3\ln(x) \\ &= 3\times(-2\ln(3)) + 6\ln(3) \\ &= -6\ln(3) + 6\ln(3) \end{aligned}$$

$$\boxed{B = 0}$$

**3** $C = \ln(81) - 3\ln(27)$

$$\begin{aligned} C = \ln(81) - 3\ln(27) &= \ln(3^4) - 3\ln(3^3) \\ &= 4\ln(3) - 3\times 3\ln(3) \quad \text{car } \ln(x^n) = n\ln(x) \\ &= 4\ln(3) - 9\ln(3) \\ &= -5\ln(3) \end{aligned}$$

$$\boxed{C = -5\ln(3)}$$

## Exercice 3 — 6 points

6 pts Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

**1** $\ln(x-4) > 0$ L'inéquation a un sens ssi $x - 4 > 0$ soit $x > 4$

$$D = ]4;+\infty[$$

$$\begin{aligned} \ln(x-4) > 0 &\iff e^{\ln(x-4)} > e^0 \\ &\iff x - 4 > 1 \qquad \text{car } e^{\ln t} = t \\ &\iff x > 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = ]5;+\infty[}$$

**2** $\ln(8x-4) = 1$ L'équation a un sens ssi $8x - 4 > 0$ soit $8x > 4$, c'est-àdire $x > \frac{1}{2}$

$$D = ]\frac{1}{2};+\infty[$$

$$\begin{aligned} \ln(8x-4) = 1 &\iff e^{\ln(8x-4)} = e^1 \\ &\iff 8x - 4 = e \qquad \text{car } e^{\ln t} = t \\ &\iff 8x = e + 4 \\ &\iff x = \tfrac{e+4}{8} \end{aligned}$$

On vérifie que le nombre $\frac{e+4}{8} \approx 0,84$ appartient au domaine $D$, donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\tfrac{e+4}{8}\}}$$

**3** $\ln(x^2+4) = \ln(5x)$

$$D = ]0;+\infty[$$

$$\begin{aligned} \ln(x^2+4) = \ln(5x) &\iff e^{\ln(x^2+4)} = e^{\ln(5x)} \\ &\iff x^2 + 4 = 5x \qquad \text{car } e^{\ln t} = t \\ &\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{5+3}{2} & &= \frac{5-3}{2} \\ &= 4 & &= 1 \end{aligned}$$

On vérifie que les nombres 1 et 4 appartiennent au domaine $D$, donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1;4\}}$$

## Exercice 4 — 6 points

6 pts

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur $]0;+\infty[$ :

- $f(x) = 5x - 2\ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 - 2\times\frac{1}{x} \\ &= \frac{5x}{x} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{5x-2}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{5x-2}{x}}$$

- $g(x) = 2x^3\ln(x)$

  $f$ est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.
  $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel $x$, dans $D_g$ :
  $\begin{cases} u(x) &= 2x^3 \\ v(x) &= \ln(x) \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 6x^2 \\ v'(x) &= \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2\ln(x) + \frac{1}{x}\times 2x^3 \\ &= 6x^2\ln(x) + \frac{2x^3}{x} \\ &= 6x^2\ln(x) + \frac{x\times 2x^2}{x} \\ &= 6x^2\ln(x) + 2x^2 \\ &= 2x^2(3\ln(x)+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = 2x^2(3\ln(x)+1)}$$

- $h(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x}$

  Sur $]0;+\infty[$ ; $f$ est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
  $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel $x$, dans $]0;+\infty[$ : $\begin{cases} u(x) &= 1+\ln(x) \\ v(x) &= x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= \dfrac{1}{x} \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times(1+\ln(x))}{x^2} \\ &= \frac{1-1-\ln(x)}{x^2} \\ &= -\frac{\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}}$$

- $k(x) = \ln(3x+1)$

  $k = \ln(u)$ donc $k' = \dfrac{u'}{u}$

$$\boxed{k'(x) = \frac{3}{3x+1}}$$

## Exercice 5 — 7 points

7 pts On considère la fonction $f$ définie sur $]0;10]$ par $g(x) = x - 3 - 2\ln(x)$.

**1** Déterminer la limite de $f$ en 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} -2\ln(x) = +\infty \text{ car } \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x - 3 = -3 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$

**2** Calculer la dérivée $f'(x)$.

**3** $f(x) = 5x - 2\ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2 \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{x} - \frac{2}{x} \\ &= \frac{x-2}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x-2}{x}}$$

**4** Montrer que $f'(x) = \dfrac{x-2}{x}$

Fait au dessus !

**5** En déduire le tableau de variation de $f$ sur $]0;10]$.

On étudie le signe de la dérivée :

| $x$ | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $(x-2)$ | | - | 0 | + | |
| signe de $x$ | | + | | + | |
| signe de $f'(x)$ | \|\| | - | 0 | + | |

On déduit le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | 0 | | 2 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | 0 | $+$ | |
| Variations de $f$ | \|\| $+\infty$ | ↘ | $1 - 2\ln(2)$ | ↗ | $7 - 2\ln(10)$ |

$$f(2) = 3 - 2 - 2\ln(2) = 1 - 2\ln(2)$$

**6** Donner à $10^{-2}$ près, à l'aide de la calculatrice, les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

La courbe $C_f$ rencontre l'axe des abscisses en deux points d'abscisses $a \approx 0,25$ et $b \approx 6,85$.