Nom :	DS 02	TSTI2D1	Oct. 2021
Prénom :		*Devoir n° 05*	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 Le cours — 4 points

4 pts Je connais mon cours !
Recopiez et complétez sur votre copie :

1. $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
2. $a^{x+y} = a^x \times a^y$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^n = a^{nx}$, avec n un entier relatif.

1. $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$;
2. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$;
3. $\log\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\log(x)$;
4. $\log(x^n) = n\log(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 — 3,5 points

Mettre sous forme d'une seule puissance : :

0.5 pt 1. $A = 7^{1,5} \times 7^{-3} = 7^{1,5-3} = 7^{-1,5}$

0.5 pt 2. $B = \left(8^{4,5}\right)^3 = 8^{4,5\times 3} = 8^{13,5}$

1 pt 3. $C = \dfrac{\left(9^8\right)^3}{9^{-4,2}} = \dfrac{9^{24}}{9^{-4,2}} = 9^{24-(-4,2)} = 9^{28,2}$

1.5 pt 4. $D = \dfrac{\left(4^{3x-2}\right)^2 \times 4^{2x+1}}{\left(4^{-x+8}\right)^3}$

$$\begin{aligned}\frac{\left(4^{3x-2}\right)^2 \times 4^{2x+1}}{\left(4^{-x+8}\right)^3} &= \frac{4^{2\times(3x-2)} \times 4^{2x+1}}{4^{3(-x+8)}}\\ &= 4^{6x-4+2x+1-(-3x+24)}\\ &= 4^{8x-3+3x-24} = 4^{11x-25}\end{aligned}$$

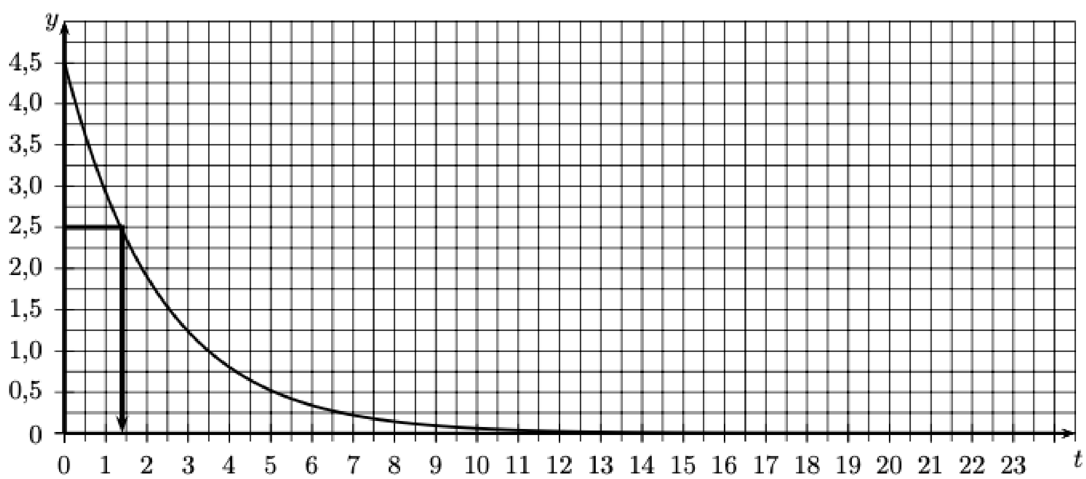
Exercice 3 — 9 points

2,5 pts **1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4,5\times 0,65^x \leq 2,5$

$$\begin{aligned}
4,5\times 0,65^x \leq 2,5 &\iff 0,65^x \leq \frac{2,5}{4,5} && \text{en divisant par 4,5> 0}\\
&\iff 0,65^x \leq \frac{5}{9} &&\\
&\iff \log(0,65^x) \leq \log\left(\frac{5}{9}\right) && \text{en appliquant la fonction log}\\
&\iff x\log(0,65) \leq \log\left(\frac{5}{9}\right) && \text{car } \log(x^n) = n\log(x)\\
&\iff x \geq \frac{\log\left(\frac{5}{9}\right)}{\log(0,65)} && \text{car on a divisé par } \log(0,65) < 0
\end{aligned}$$

alors l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} = \left[\frac{\log\left(\frac{5}{9}\right)}{\log(0,65)};+\infty\right[$

2,5 pts **2** Retrouver le résultat à l'aide du schéma ci-dessous.



Déjà l'inéquation sécrit $f(x) \geq 2,5$
Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des point de C_f situés en dessous de la droite d'équation $y = 2,5$. On lit donc

alors l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} = [a;+\infty[$ où $a \approx 1,4$.
On peut vérifier que $\frac{\log\left(\frac{5}{9}\right)}{\log(0,65)} \approx 1,4$

1,5 pt **3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^{5,1} \geq 1500$

$$\begin{aligned}
3x^{5,1} \geq 1500 &\iff x^{5,1} \geq \frac{1500}{3} && \text{en divisant par } 3>0\\
&\iff x^{5,1} \geq 500 && \text{On simplifie : } \frac{1500}{3} = 500\\
&\iff \log(x^{5,1}) \geq \log(500) && \text{en appliquant la fonction log}\\
&\iff 5,1\log(x) \geq \log(500) && \text{car } \log(x^n) = n\log(x)\\
&\iff \log x \geq \frac{\log(500)}{5,1} && \text{car on a divisé par } 5,1>0\\
&\iff 10^{\log x} \geq 10^{\frac{\log(500)}{5,1}} && \text{en appliquant la fonction } x \mapsto 10^x\\
&\iff x \geq 10^{\frac{\log(500)}{5,1}} && \text{car } 10^{\log x} = x
\end{aligned}$$

alors l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} = \left[10^{\frac{\log(500)}{5,1}};+\infty\right[$

2.5 pts **4** On donne les étapes de résolution d'une inéquation. **Relever sur votre copie,** justifier et compléter chacune des étapes

$$\begin{aligned}
50\times 0,4^n \geq 10 &\iff 0,4^n \geq \frac{10}{50} && \text{en divisant par } 50>0\\
&\iff 0,4^n \geq \frac{1}{5} && \text{On simplifie : } \frac{10}{50} = \frac{1}{5}\\
&\iff \log(0,4^n) \geq \log\left(\frac{1}{5}\right) && \text{en appliquant la fonction log}\\
&\iff n\log(0,4) \geq -\log(5) && \text{car } \log(x^n) = n\log(x) \text{ et } \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)\\
&\iff n \leq -\frac{\log(5)}{\log(0,4)} && \text{car on a divisé par } \log(0,4)<0
\end{aligned}$$

alors l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} = \left]-\infty;-\frac{\log(5)}{\log(0,4)}\right]$

Exercice 4 — 4 points

4 pts Ecrire sous forme d'un seul logarithme :

1 $A = 2\log(6) + \log(2)$

$$\begin{aligned}
A &= 2\log(6) + \log(2)\\
&= \log\left(6^2\right) + \log(2) && \text{car } n\log(a) = \log(a^n)\\
&= \log(36) + \log(2)\\
&= \log(36\times 2) && \text{car } \log(a)+\log(b) = \log(a\times b)\\
&= \log(72)
\end{aligned}$$

2 $B = 2\log\left(\frac{1}{5}\right) - \log(10)$

$$\begin{aligned}
B &= 2\log\left(\frac{1}{5}\right)-\log(10) \\
&= \log\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)-\log(10) && \text{car } n\log(a)=\log\left(a^n\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{25}\right)+\log\left(\frac{1}{10}\right) && \text{car } -\log(a)=\log\left(\frac{1}{a}\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{25}\times\frac{1}{10}\right) && \text{car } \log(a)+\log(b)=\log\left(a\times b\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{250}\right)
\end{aligned}$$

3 $A=-2\log(4)+\log(3)$

$$\begin{aligned}
A &= -2\log(4)+\log(3) \\
&= \log(3)-2\log(4) \\
&= \log(3)-\log\left(4^2\right) \\
&= \log(3)-\log(16) \\
&= \log\left(\frac{3}{16}\right)
\end{aligned}$$

4 $A=\log(5)-3\log\left(\frac{1}{2}\right)$

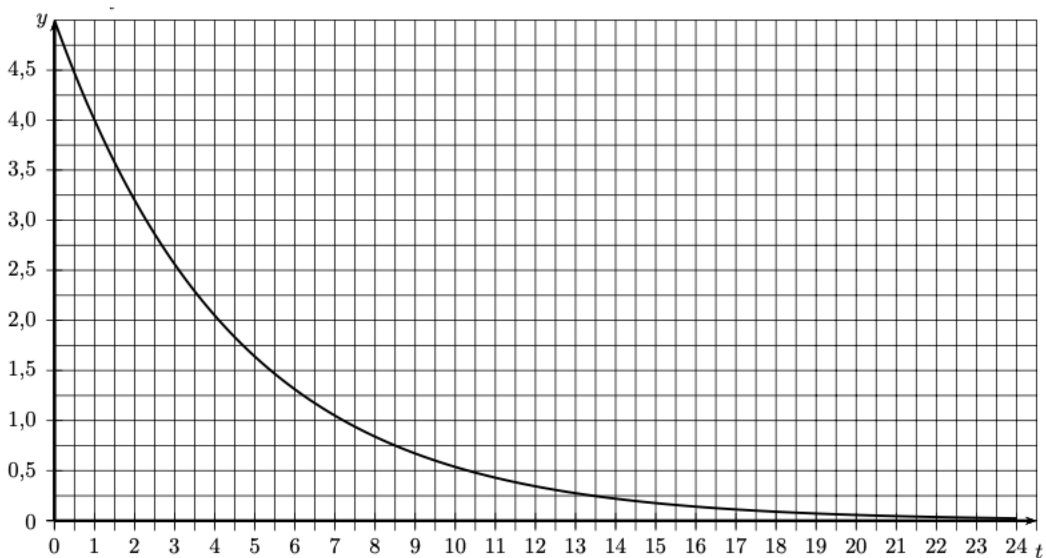
$$\begin{aligned}
A &= \log(5)-3\log\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \log(5)-\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \\
&= \log(5)-\log\left(\frac{1}{8}\right) \\
&= \log(5)+\log(8) \\
&= \log(40)
\end{aligned}$$

Exercice 5 **7 points**

Un médicament A est administré en intraveineuse. Un laboratoire étudie le processus d'absorption de ce médicament par l'organisme pendant les 24 heures qui suivent l'injection.
La quantité de médicament A présent dans le sang est exprimée en cm^3. Le temps t est exprimé en heures.
La quantité de produit présent dans le sang, en fonction du temps t, est donnée par

$$f(t) = 5 \times 0,8^t$$

où t désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;24]$.
On a représenté ci-dessous la courbe C_f représentative de la fonction f.



Partie A : Graphiquement

0.5 pt **1** Déterminer graphiquement la quantité de médicament A administrée initialement. (en cm^3)
On lit $f(0) = 5$

la quantité de médicament A administrée initialement est de 5 cm^3

1 pt **2** Déterminer graphiquement la quantité de médicament présente au bout de 3h puis au bout de 12h. (à 0,1cm^3 près)
On lit $f(3) \approx 2,5$ et $f(12) \approx 0,3$

la quantité de médicament A au bout de 3h est environ de 2,5 cm^3, et la quantité de médicament A au bout de 12h est environ de 0,3 cm^3

1 pt **3** Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la quantité de médicament A présente dans le sang aura diminué de 20 %.
On cherche au bout de combien de temps la quantité de médicament A présente dans le sang sera donc à 80% de sa valeur initiale.
Soit $f(t) = 0,8 \times 5 = 4$. Sur le graphique on lit l'antécédent de 4 qui est 1.

La quantité de médicament A présente dans le sang aura diminué de 20 % au bout de 1 heure.

1 pt **4** Le laboratoire indique que le médicament A n'est plus efficace lorsque la quantité de produit présente dans le sang est inférieure à 1 cm^3. Déterminer graphiquement la durée d'efficacité de ce médicament.
On cherche le temps t pour lequel $f(t) < 1$. Graphiquement on lit $f(t) < 1$ pour $t > 7,3h$

La durée d'efficacité de ce médicament est environ 7.3 h, soit environ 7h15 min.

Partie B : Par le calcul

0.5 pt **1** En utilisant la formule donné ci dessus. Calculer la quantité de médicament A présente dans le sang à l'instant t = 0. Avec quelle question ci dessus ce résultat doit-il être en accord ?
$f(0) = 5 \times 0,8^0 = 5 \times 1 = 5$

> la quantité de médicament A administrée initialement est de 5 cm^3. C'est en accord avec la question A.1.

1 pt **2** Calculer la quantité de médicament A présent dans le sang après 3 heure puis 12 heures Avec quelle question ci dessus ce résultat doit-il être en accord ?

- $f(3) = 5 \times 08^3 = 2,56$
- $f(12) = 5 \times 08^{12} \approx 0,34$

> la quantité de médicament A au bout de 3h est environ de 2,5 cm^3, et la quantité de médicament A au bout de 12h est environ de 0,3 cm^3.C'est en accord avec la question A.2.

1 pt **3** Justifier pourquoi la fonction f est décroissante.

- Si $0 < a < 1$ alors $x \longmapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- En particulier pour $a = 0,8$, $x \longmapsto 0,8^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- En multipliant par $5 > 0$, on obtient $x \longmapsto 5 \times 08^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

> $x \longmapsto 5 \times 0,8^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

1 pt **4** Etablir le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.

x	0		24
Variations de f	5	$\nearrow$	$5 \times 0.8^{24} \approx 0.02$