Nom :	**DM 03**	TSTI2D2 — *Nov. 2020*
Prénom :		*Devoir n° 07* — .../...

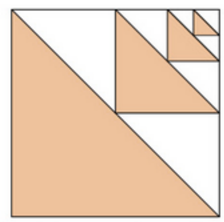
Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1

115 Capacité 10 p. 16

En traçant la diagonale d'un carré de côté c, on obtient un triangle rectangle que l'on colore, comme sur la figure ci-contre.
On recommence de la même manière dans le carré situé au quart du carré initial en haut à droite, et ainsi de suite...



Déterminer, en fonction de c, l'aire de la partie colorée si l'on construit une figure constituée de dix triangles.

Piste : On pourra introduire la suite (a_n) où a_n est l'aire du n-ième triangle rectangle coloré.

- ✍ L'aire colorée du premier triangle (le plus grand) vaut $A_1 = \dfrac{1}{2}c \times c = \dfrac{1}{2}c^2$.
- ✍ L'aire colorée du deuxième triangle vaut $A_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}c \times \dfrac{1}{2}c = \dfrac{1}{8}c^2 = \dfrac{1}{2}c^2 \times \dfrac{1}{4}$.
- ✍ L'aire colorée du deuxième triangle vaut $A_3 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}c \times \dfrac{1}{4}c = \dfrac{1}{32}c^2 = \dfrac{1}{2}c^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$.
- ✍ ....
- ✍ L'aire colorée du dixième triangle vaut $A_3 = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 c \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 c = \dfrac{1}{2}c^2 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^9$.

Ainsi on observe que la suite des aires est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
L'aire coloriée vaut donc $S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10}$

$$\begin{aligned} S &= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10} \\ &= \left(\frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - \text{raison}}\right) \times \text{premier terme} \\ &= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}\right) \times \frac{1}{2}c^2 \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right) \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}c^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire colorée si on construit 10 triangles vaut } A = \frac{2}{3}c^2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}$$

Exercice 2

86 CALC Capacité 9 p. 16

On se propose de construire un château de cartes selon le modèle ci-contre.

1. Combien de cartes sont utilisées si on construit ainsi dix étages ?

2. Combien d'étages peut-on construire avec 1 000 cartes ? Combien restera-t-il de cartes ?

1 Notons u_n le nombres de cartes d'une pyramide à n étages.
On a $u_1 = 3$, et on passe d'un étage au suivant en ajoutant 3 cartes. La suite (u_n) est donc géométrique de raison 3.
Le terme général est donc $u_n = u_1 + (n-1)r = 3 + 3(n-1) = 3n$.
Ainsi $u_{10} = 3 \times 10 = 30$.
En partant du haut, le nombre de cartes d'une pyramide à 10 étages est :

$$\begin{aligned}
N &= 3+6+9+12+\ldots+u_{10} \\
&= 3+6+9+12+\ldots+30 \\
&= \text{ nombre de termes } \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \\
&= 10 \times \frac{3+30}{2} \\
&= 165
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une pyramide à 10 étages contient 165 cartes.}}$$

2 On cherche le plus grand entier n tel que $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leq 1000$

$$\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\
&= \text{ nombre de termes } \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \\
&= n \times \frac{u_1 + u_n}{2} \\
&= \frac{n(3+3n)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n \leq 1000 \quad &\iff \frac{n(3+3n)}{2} \leq 1000 \\
&\iff 3n + 3n^2 \leq 2000 \\
&\iff 3n^2 + 3n - 2000 \leq 0
\end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 3 \times (-2000) = 24009$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-3+\sqrt{24009}}{6} & &= \frac{-3-\sqrt{24009}}{6} \\
&\approx 25,3 & &\approx -26,3
\end{aligned}$$

$3x^2 + 3x - 2000$ est un trinôme du second degré qui a pour racines x_1 et x_2 ; il a donc le signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $3x^2+3x-2000$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le plus grand entier n vérifiant $3n^2+3n-2000 \leq 0$ est donc 25. Avec 1000 cartes on peut donc construire une pyramide à 25 étages qui utilise $S_{25} = \dfrac{25(3+3\times 25)}{2} = 975$ cartes.

Avec 1000 cartes on peut donc construire une pyramide à 25 étages qui utilise975 cartes. Il en restera donc 25 !

On peut également traiter cette question à l'aide d'un algorithme :

Algorithme Python 1

```python
# Devoir à la maison n°3 TSTI2D2
u=3
n=1
S=3
while S<=1000:
        u=u+3
        S=S+u
        n=n+1
print(S,n)

```

On obtient en exécutant ce script S=1056 et n=26.

Algorithme Python 2

```python
# On calcule donc le nombre de cartes d'une pyramide à 25 étages
S=0
for k in range(1,26):
        S=S+3*k
print(S)

# ou avec une fonction on calcule le nombre de cartes d'une pyramide à n étages
def Nombre_Cartes(n):
        S=0
        for k in range(1,n+1):
                S=S+3*k
        return print(S)
Nombre_Cartes(25)

```

On obtient ici S=975, d'où la conclusion !

Exercice 3

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.

On remplit un bassin avec 90 m^3 d'eau.

PARTIE A

1 Calculer le volume d'eau contenu dans ce bassin au bout de deux semaines.

Au bout d'une semaine, le volume d'eau contenu dans le bassin est : $90 \times \left(1 - \dfrac{3}{100}\right) = 87,3$

Au bout de la deuxième semaine, le volume d'eau contenu dans le bassin est donc : $87,3 \times 0,97 = 84,681$

$\boxed{\text{Au bout de deux semaines, le volume d'eau contenu dans le bassin est de } 84,681\ m^3.}$

2 On note V_n le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines; on a donc $V_0 = 90$.

a. Justifier que pour tout entier n, $V_{n+1} = 0,97 \times V_n$.

Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 3 % est : 1-$\dfrac{3}{100}$=0,97

Par conséquent, pour tout entier n, $V_{n+1} = V_n - \dfrac{3}{100}V_n = \left(1 - \dfrac{3}{100}\right)V_n = 0,97 \times V_n$.

$\boxed{\text{Par conséquent, pour tout entier } n, V_{n+1} = 0,97 \times V_n.}$

b. Déterminer la nature de la suite (V_n) puis, exprimer V_n en fonction de n. Pour tout entier n, $V_{n+1} = 0,97 \times V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,97. D'autre part, le premier terme de cette suite géométrique est $V_0 = 90$ donc : d'après le cours $V_n = q^n \times V_0$.

$\boxed{\text{Pour tout entier } n, V_n = 90 \times 0,97^n.}$

3 Au bout de quatre semaines, le bassin a-t-il perdu 12 % de son volume d'eau ?
Au bout de quatre semaines le nombre de m^3 d'eau contenu dans ce bassin est :$V_4 = 90 \times 0,97^4 \approx 79,676$

Le taux du pourcentage d'évolution au bout de quatre semaines est :
$t = \left(\dfrac{V_4}{V_0} - 1\right) \times 100$. Soit $t = \left(\dfrac{90 \times 0,97^4}{90} - 1\right) \times 100 \approx -11,47$

$\boxed{\text{Au bout de quatre semaines, le bassin a perdu environ 11,5 \% de son volume d'eau.}}$

PARTIE B

Pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine $2,4$ m^3 d'eau dans le bassin.
On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation :   Affecter à N la valeur 0
                   Affecter à U la valeur 90
Traitement :       Tant_que U ⩾ 88 :
                      | Affecter à N la valeur N + 1
                      | Affecter à U la valeur 0,97 × U + 2,4
                   Fin Tant_que
Sortie :           Afficher N
```

1 Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au centième près.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U	90	89,7	89,41	89,13	88,85	88,59	88,33	88,08	87,84
Test $U \geqslant 88$	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	FAUX

2 Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.
Le nombre affiché en sortie de l'algorithme est 8.

C'est au bout de huit semaines que le volume d'eau du bassin sera inférieur à $88m^3$.

3 Ecrire cet algorithme en langage Python et l'exécuter.

Algorithme Python 3

```python
# Devoir à la maison n°3 TSTI2D2
u=90
n=0
while u>=88:
        n=n+1
        u=0.97*u+2.4
print(n)
```