Nom : .... Prénom :	DM 02	TSTI2D2 Oct. 2020 Devoir n° 05 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

62 Dans chaque cas, déterminer une primitive sur l'intervalle I de la fonction h.

a. $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $\mathrm{I} =]-1;+\infty[$.

b. $h(t) = 2\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

c. $h(x) = \dfrac{1}{(2-5x)^3}$ et $\mathrm{I} = \left]\dfrac{2}{5};+\infty\right[$.

d. $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x^2}$ et $\mathrm{I} =]-1;0[$.

a) $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

On pose $u = x+1$, donc $u' = 1$, ainsi $h = \dfrac{u'}{u^2}$, donc une primitive de h est $H = \dfrac{1}{u}$

> Une primitive de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ définie sur $I =]-1;+\infty[$ est la fonction H définie par $H(x) = -\dfrac{1}{x+1}$

b) $h(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$

On pose $u = 2t - \frac{\pi}{3}$, donc $u' = 2$, ainsi $h = u'\cos(u)$, donc une primitive de h est $H = \sin(u)$

> Une primitive de la fonction $h(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ définie sur $I = \mathbb{R}$ est la fonction H définie par $H(t) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $h(x) = \dfrac{1}{(2-5x)^3}$

On pose $u = 2-5x$, donc $u' = -5$, ainsi $h = \dfrac{u'}{-5} \times \dfrac{1}{u^3} = -\dfrac{1}{5} \times \dfrac{u'}{u^3} = -\dfrac{1}{5} \times u'u^{-3}$, donc une primitive de h est $H = -\dfrac{1}{5} \times \dfrac{u^{-3+1}}{-3+1} = -\dfrac{1}{5} \times \dfrac{u^{-2}}{-2} = \dfrac{1}{10u^2}$

> Une primitive de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{(2-5x)^3}$ définie sur $I = \left]\dfrac{2}{5};+\infty\right[$ est la fonction H définie par $H(x) = \dfrac{1}{10(2-5x)^2}$

d) $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x^2}$

En utilisant la question a) on obtient :

> Une primitive de la fonction $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $I =]-1;0[$ est la fonction H définie par $H(x) = -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x}$

Exercice 2

47 On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2\cos(4x) + 3\sin(4x).$$

1. Pour tout réel x, calculer $g'(x)$.

2. On note g'' la dérivée de g' sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout réel x, calculer $g''(x)$.

b. Vérifier que pour tout réel x, on a $g''(x) + 16g(x) = 0$.

1 On a $g(x) = -2\cos(4x) + 3\sin(4x)$.
En utilisant les deux formules de dérivation :

$$(\cos(u))' = -u'\sin(u) \text{ et } (\sin(u))' = -u'\cos(u)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2 \times (-4\sin(4x)) + 3 \times (4\cos(4x)) \\ &= 8\sin(4x) + 12\cos(4x) \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = 8\sin(4x) + 12\cos(4x)}$$

2 **a.** On part de $g'(x) = 8\sin(4x) + 12\cos(4x)$, on dérive à nouveau et on obtient :

$$\begin{aligned} g''(x) &= 8 \times (4\cos(4x)) + 12 \times (-4\sin(4x)) \\ &= 32\cos(4x) - 48\sin(4x) \end{aligned}$$

$$\boxed{g''(x) = 32\cos(4x) - 48\sin(4x)}$$

b.

$$\begin{aligned} g''(x) + 16g(x) &= 32\cos(4x) - 48\sin(4x) + 16(-2\cos(4x) + 3\sin(4x)) \\ &= 32\cos(4x) - 48\sin(4x) - 32\cos(4x) + 48\sin(4x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout réel x on a $g''(x)+16g(x)$, on dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.

Exercice 3

MATHS & PHYSIQUE

103 Capacité 7 p. 15

Une source sonore émet un son dont le niveau d'intensité est 100 décibels. Une plaque d'isolation phonique absorbe 45 % de l'intensité du son. On note d_n le niveau d'intensité du son, mesurée en décibels, après la traversée de n plaques d'isolation phonique.

Ainsi $d_0 = 100$.

1. Calculer d_1, d_2 et d_3.

2. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n et en déduire la nature de la suite (d_n).

3. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

4. Déterminer le niveau d'intensité du son après que celui-ci ait traversé neuf plaques.

LE SAVIEZ-VOUS

Le décibel (dB) est une unité de mesure qui exprime le niveau d'intensité d'un son. Un décibel est égal à un dixième de Bel. Une augmentation du niveau d'intensité sonore de 3 dB équivaut à peu près à un doublement de l'intensité du son.

1 Quelques rappels ?

Définition 1

Une quantité passe la valeur initiale V_i à la valeur finale V_f. La variation relative de cette quantité est $\dfrac{V_f - V_i}{V_i}$.
Cette variation relative s'appelle aussi **taux d'évolution** (nombre sans unité)

On pose $t = \dfrac{V_f - Vi}{V_i}$ (taux d'évolution).
On a alors $tV_i = V_f - V_i$ donc $V_i + tV_i = V_f$ soit $V_f = V_i + tV_i = (1+t)V_i$.

Propriété 1

Le nombre $C = 1 + t$ s'appelle le **coefficient multiplicateur**.
Si t est négatif, $C < 1$ et la quantité diminue.
Si t est positif, $C > 1$ et la quantité augmente.

Ici on procède à une baisse de 45%. On a $d_0 = 100$, après la traversée d'une plaque le son perd 45% e son intensité, ce qui revient à la mutiplier par $1 - \dfrac{45}{100} = 1 - 0,45 = 0,55$

- ✍ $d_1 = 0,55 \times d_0 = 0,55 \times 100 = 55$
- ✍ $d_2 = 0,55 \times d_1 = 0,55 \times 55 = 30,25$
- ✍ $d_3 = 0,55 \times d_2 = 0,55 \times 30,25 \approx 16,64$

$$\boxed{d_1 = 55, d_2 \approx 30 \text{ et } d_3 \approx 17.}$$

2 d_{n+1} est l'intensité après le passage de la $n+1^{\text{ième}}$ plaque, donc :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n - 0,45 d_n \\ &= d_n(1 - 0,45) \\ &= 0,55 d_n \end{aligned}$$

$\boxed{d_{n+1} = 0,55 d_n\text{, la suite } (d_n) \text{ est donc géométrique de raison } 0,55 \text{ de premier terme } d_0 = 100.}$

3 Comme (d_n) est géométrique, $d_n = q^n \times d_0 = 0,55^n \times 100$

$$\boxed{d_n = 100 \times 0,55^n}$$

4 Le niveau d'intensité sonore après la taversée de 9 plaques vaut :

$$\begin{aligned} d_9 &= 0,55^9 \times 100 \\ &\approx 0,46 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le niveau d'intensité sonore après la taversée de 9 plaques vaut environ 0,46 dB.}}$