Nom :	DM 01	TSTI2D2 Oisclot — Sept. 2020
Prénom :		Devoir n° 03 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

33 **1.** Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$p(x) = 7x^2 - 5x + 3.$$

Pour tout réel x, calculer $p'(x)$.

2. On note f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{p(x)}{x-1}.$$

Déterminer la dérivée de f sur $]1;+\infty[$.

1 Comme $(x) = 7x^2 - 5x + 3$, on déduit

$$\boxed{p'(x) = 14x - 5}$$

2

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-1)}$$

f est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
$f = \frac{u}{v}$ d'où $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans$]1;+\infty[$:

$$\begin{cases} u(x) & = p(x) = 7x^2 - 5x + 3 \\ v(x) & = x - 1 \end{cases} \quad \text{ainsi :} \begin{cases} u'(x) & = p'(x) = 14x - 5 \\ v'(x) & = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(14x-5)(x-1) - 1 \times (7x^2 - 5x + 3)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{14x^2 - 14x - 5x + 5 - 7x^2 + 5x - 3}{(x-1)^2} \\ &= \frac{7x^2 - 14x + 2}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

on déduit

$$\boxed{f'(x) = \frac{7x^2 - 14x + 2}{(x-1)^2}}$$

Exercice 2

49 Capacité 3, p. 205

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - x$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout réel x positif, $\sin x - x$ est négatif.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x.$$

a. Montrer que g est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Pour tout réel x positif, comparer $g(x)$ et $g(0)$ et en déduire que $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x$.

1 **a.**

- Dérivée : f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = \cos x - 1$.
- Signe de la dérivée : On sait que pour tout rel x on a $\cos x \leq 1$, donc $\cos x - 1 \leq 0$, ce qui prouve que f est décroissante sur $[0;+\infty[$.
- Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
Variations de f	0 ↘	

b. Au vu du tableau de variation, on déduit que f est négative sur $[0;+\infty[$.
En effet, f étant décroissante sur $[0;+\infty[$, si $x \geq 0$ alors $f(x) \leq f(0)$ soit $f(x) \leq 0$.

2 **a.**

- Dérivée : g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $g'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - (-\sin x) = \sin x - x = f(x)$.
- Signe de la dérivée : On sait que pour tout rel x on a $f(x) \leq 0$, donc $g'(x) \leq 0$, ce qui prouve que g est décroissante sur $[0;+\infty[$.
- Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
Variations de g	0 ↘	

$$g(0) = 1 - \frac{0^2}{2} - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

b. g étant décroissante sur $[0;+\infty[$, on déduit que si $x \geq 0$ alors $g(x) \leq g(0)$ soit $g(x) \leq 0$.

Une tracé des courbes de f et g pour illustrer l'exercice :