Kit de survie Bac TSTI2D 2019 - 2020

Lycée l'Oiselet

TSTI2D1

Année Scolaire 2019 - 2020

Cours de Maths

Luc Giraud

Case des Maths
20 mars 2020

CASE DES MATHS

Kit de survie pour le Bac !e

1. Inégalités - étude du signe d'une expression

1.1. Opérations sur les inégalités

Propriété 1

Règles usuelles
Pour tout $a : x < y \Longleftrightarrow x + a < y + a$ même sens
Pour tout $k > 0 : x < y \Rightarrow kx < ky$ même sens
Pour tout $k < 0 : x < y \Rightarrow kx > ky$ sens contraire
Pour x et y de même signe : $x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$ sens contraire
Pour $x > 0$ et $y > 0$: $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$ même sens
Pour $x > 0$ et $y > 0$: $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ même sens
Si f est strictement croissante * : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ même sens
Si f est strictement décroissante * : $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ sens contraire
(* sur un intervalle contenant x et y)

Exercice 1

Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$

1.2. Inégalités classiques

Propriété 2

Pour tout $x : 1 \leqslant \cos x \leqslant 1 ; 1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

1.3. Signe de $ax + b (a \neq 0)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax + b$		Signe de $-a$	0	Signe de $-a$	

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle « signe de a après le 0 . »

1.4. *Signe de* $ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$

Propriété 3

Signe du trinôme
On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

✍ Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a. »

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a	

✍ Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$. »

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de a	

✍ Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

(on suppose que $x_1 < x_2$)

1.5. *Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe*

Les cas les plus classiques :

x			
Variation de f	$\searrow$	$+$	$\nearrow$
Signe de $f(x)$	$+$		$+$

Minimum positif

x			
Variation de f	$\nearrow$	$-$	$\searrow$
Signe de $f(x)$	$-$		$-$

Maximum négatif

x		α	
Variation de f		0	
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

x		α	
Variation de f		0	
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

1.6. Pour les autres expressions :

Pour étudier le signe d'une expression $A(x)$ (qui n'est pas du premier, ni du second degré et après avoir factorisé au maximum) sur un intervalle I, on résout l'inéquation $A(x) > 0$ (on cherche ce qui annule l'expression et où mettre le(s) signe(s) +).

Exercice 2

Exemple : étude du signe de $(3-\ln x)$ sur $I =]0;+\infty[$.

2. Étude de fonction

2.1. Limites

1. **Limite d'une somme**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**

? : forme indéterminée.

2. **Limite d'un produit**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x)) =$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

3. **Limite d'un quotient si la limite du dénominateur n'est pas nulle**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

4. **Limite d'un quotient si la limite du dénominateur est nulle**

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**

Limite d'une fonction composée

1. Propriété Les lettres a, b et l désignent soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, g et h sont deux fonctions.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{x\to a} h(x) = b \\ \text{et } \lim\limits_{X\to b} g(X) = l \end{array}\right\} \text{alors} \lim\limits_{x\to a} g(h(x)) = l$$

2. Exemple

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{X\to +\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \text{alors } \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} = +\infty$$

2.2. *Asymptotes*

Définition 1

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .
- Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

2.3. *Position relative*

Exemple 1

Pour étudier la position relative de la courbe de f et de la courbe de g sur un intervalle I, il suffit d'**étudier le signe de** $f(x) - g(x)$.

- si $f(x) > g(x)$ sur I alors $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de $\mathcal{C}_g$,
- si $f(x) < g(x)$ sur I alors $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$,
- si $f(x) = g(x)$ pour $x = \alpha$ alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent au point d'abscisse α.

2.4. Dérivées

Tableau des dérivées usuelles

Fonction f définie par :	Fonction f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x)=k$, k constante réelle	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$

Dérivées et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un réel.

Somme	$(u+v)'=u'+v'$
Produit par un réel	$(ku)'=ku'$
Produit	$(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$
Inverse	Si $v\neq 0$ sur I, $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$
Qoutient	Si $v\neq 0$ sur I, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

Dérivée et fonction composée
u dérivable sur un intervalle I et v dérivable en $u(x)$ pour tout x élément de I.

$u(x)=ax+b$	$[v(ax+b)]'=a\times v'(ax+b)$
Puissance entière	$[(u(x))^n]'=nu'(x)\times[u(x)]^{n-1}, n\in\mathbb{Z}^*, n\neq 1$ et $u(x)\neq 0$ sur I si $n<0$
avec exp	$\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)'=u'(x)\times\mathrm{e}^{u(x)}$
avec ln	$[\ln(u(x))]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec u à valeurs strictement positives
Cas général	$[v(u(x))]'=v'(u(x))\times u'(x)$

2.5. Tangente

Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

(le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m, il suffit de résoudre l'équation $f'(x)=m$.

3. Fonctions logarithme népérien et exponentielle

3.1. Existence

$\ln x$ n'existe que si $x>0$.
e^x existe pour tout réel x.
Exemple : La fonction f définie par $f(x)=\ln(x-1)$ n'est définie que sur $]1;+\infty[$ car il faut que $x-1$ soit strictement positif.

3.2. Lien entre $\ln x$ et e^x

$y=ex\Longleftrightarrow \ln y=x$
$\ln(e^x)=x; e^{\ln x}=x$ (pour $x>0$)

3.3. Valeurs particulières

$\ln 1=0$; $\ln e=1$
$e^0=1; e^1=e; e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

3.4. Propriétés algébriques

Propriété 4

Propriétés algébriques

Si $a>0$ et $b>0$:

- $\ln(ab)=\ln a+\ln b$;
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$;
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- Pour tout entier $n, \ln(a^n)=n\ln a$;
- $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$

Pour tous réels a et b :

- $e^a\times e^b=e^{a+b}$;
- $\dfrac{1}{e^a}=e^{-a}$;
- $\dfrac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}, (e^a)^n=e^{na}$

Exemples : Si $x > 0, \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln\left(x^2\right) = -2\ln x$

Pour tout $x, \left(e^{-x}\right)^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

3.5. Signe de $\ln x$ et de e^x

- Signe de $\ln x$:
  Si $0 < x < 1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.
  Si $x > 1$ alors $\ln x$ est strictement positif.
  $\ln 1 = 0$.
- Signe de e^x :
  pour tout réel x, e^x est strictement positif.

3.6. équations et inéquations

Propriété 5. : équations et inéquations

- Logarithmes Si $a > 0$ et $b > 0$:
  - $\ln a = \ln b \iff a = b$
  - $\ln a < \ln b \iff a < b$
  - $\ln a \leqslant \ln b \iff a \leqslant b$
- Exponentielles
  - $e^a = e^b \iff a = b$;
  - $e^a < e^b \iff a < b$
  - $e^a \leqslant e^b \iff a \leqslant b$
- Et pour finir
  - $\ln x = a \iff x = e^a$
  - $\ln x < a \iff 0 < x < e^a$
  - $\ln x > a \iff x > e^a$

Remarque : Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).
Exemples d'équations et d'inéquations :

- $\ln x + \ln 2 = 5$.
  Condition d'existence : $x > 0$.
  Ave cette condition : $\ln x + \ ln 2 = 5 \iff \ln(2x) = 5 \iff 2x = e^5 \iff x = \frac{e^5}{2}$

$$S = \left\{\frac{e^5}{2}\right\}$$

- $\ln(x+2) = 6$

  Condition d'existence : $x + 2 > 0 \iff x > -2$.
  Avec cette condition : $\ln(x+2) \geqslant 6 \iff x + 2 \geqslant e^6 \iff x \geqslant e^6 - 2$

$$S = \left]e^6 - 2; +\infty\right[$$

- $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$
  $X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.
  $X = -1$ ou $X = 3$

D'où $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 3 \Longleftrightarrow x = ln3$.

$$S = \{\ln 3\}$$

$e^x < 5e{-}x \Longleftrightarrow e^x < \dfrac{5}{e^x} \Longleftrightarrow e^{2x} < 5$ (car $e^x > 0$)

$e^{2x} < 5 \Longleftrightarrow 2x < \ln 5 \Longleftrightarrow x < \dfrac{1}{2}\ln 5$

$$S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\ln 5\right[$$

4. Primitives

4.1. Définitions et propriétés :

Définition 2. et propriétés

F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de $I, F'(x) = f(x)$.
Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
Primitives des fonctions usuelles : (F représente une primitive de f)

Obtention de primitives par lecture inverse du tableau des dérivées :

$f(x)$	une primitive $F(x)$	conditions
0	k	$I = \mathbb{R}$
a	ax	$I = \mathbb{R}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$I = \mathbb{R}$ si $n > 0$ $\quad I = \mathbb{R}^*$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$I = \mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$I = \mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x$	$I = \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$I = \mathbb{R}$
e^x	e^x	$I = \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$I =]0; +\infty[$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$I = \mathbb{R}$
e^x	e^x	$I = \mathbb{R}$

4.2. Formules générales :

Forme de f	une primitive de f	Exemples
UU'	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x) = \cos x \times \sin x \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{2}$
U^2U'	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x) = 4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$U^nU' \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{U^{n+1}}{n+1}$	$f(x) = 2x(x^2+1)^n \Rightarrow F(x) = \dfrac{(x^2+1)^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{U'}{U^2} \quad (U(x) \neq 0)$	$-\dfrac{1}{U}$	$f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+1} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3} \quad (U(x) \neq 0)$	$-\dfrac{1}{2U^2}$	$f(x) = \dfrac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{2(7x+1)^2}$
$\dfrac{U'}{U} \quad (U(x) > 0)$	$\ln U$	$f(x) = \dfrac{4}{4x+1} \Rightarrow F(x) = \ln(4x+1)$
$\dfrac{U'}{U} \quad (U(x) \neq 0)$	$\ln\lvert U\rvert$	$f(x) = \dfrac{4}{4x+1} \Rightarrow F(x) = \ln\lvert 4x+1\rvert$

4.3. Recherche pratique d'une primitive :

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante.
Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.
Exemple : Soit f définie par $f(x)=e^{3x+4}$. On pense à la forme $U'e^U$ (dont une primitive est e^U) .
On écrit que $f(x)=\frac{1}{3}\underbrace{\left(3e^{3x+4}\right)}_{\text{forme exacte}}$
Une primitive de f est donc F définie par $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x+4}$.

5. Calcul intégral

Définition 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I : Pour tous a et b de I :
$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b==F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

Exemple : $\int_1^2 3x^2\,dx=\left[x^3\right]_1^2==2^3-1^3=7$

5.1. Propriétés de l'intégrale :

Propriété 6

Propriétés de l'intégrale
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :

- ✍ $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$(Relation de Chasles)
- ✍ $\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ (linéarité de l'intégrale)
- ✍ Pour tout réel k, $\int_a^b (kf)(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ (linéarité de l'intégrale)
- ✍ Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$
- ✍ Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0$
- ✍ Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$

Définition 4

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
Si f est continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est égale à

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

5.2. Calculs d'aires

Propriété 7

- f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$.
  Si pour tout $x \in [a;b], f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$ en unités d'aire.
  (intégrale de la plus grande moins la plus petite)
- Si pour tout $x \in [a;b], f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$ en unités d'aire.
- Si pour tout $x \in [a;b], f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale $\int_a^b -f(x)\,dx$ en unités d'aire.

Remarques :

- Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
  (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses)× (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaître leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est la plus grande et la plus petite.

6. Suites

6.1. Suites géométriques

Propriété 8

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_n = q^n \times u - 0$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme } \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple : Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 24 \times 5 = 80; U_{10} = q^{10} \times U_0 = 210 \times 5 = 5120$
Pour tout $n, U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.
$U_0 + U_1 + \ldots + U_8 = 5 \times \dfrac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2555$

6.2. Limite de q^n avec $q > 0$

Propriété 9

- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

Exercice 3

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{3}^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

6.3. Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geqslant a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leqslant a$ (si $0 < q < 1$)

Exemple 2

On isole q^n et on utilise la propriété $\ln(q^n) = n\ln q$.

Exemple 3

- Recherche du plus petit entier n tel que $2^n \geqslant 3000$:
  $2^n \geqslant 3000 \Longleftrightarrow \ln(2^n) \geqslant ln(3000) \Longleftrightarrow n\ln 2 \geqslant ln(3000) \Longleftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(3000)}{\ln 2}$ car $\ln 2 > 0$
  Or $\frac{\ln(3000)}{\ln 2} \approx 11,55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.
- Recherche du plus petit entier n tel que $0,8^n \leqslant 0,01$:
  $0,8^n \leqslant 0,01 \Longleftrightarrow \ln(0,8^n) \leqslant ln(0,01) \Longleftrightarrow n\ln 0,8 \leqslant ln(0,01) \Longleftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$ car $\ln(0,8) < 0$
  Or $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

7. Équations différentielles

7.1. Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

Propriété 10

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f définies par $f(x) = ke^{ax}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f définies par $f(x) = -\frac{b}{a}ke^{ax}$.

Exercice 4

Résolution de $y' + 4y = 8$; on isole y' soit $y' = -4y + 8$
$(a = -4 ; b = 8)$

- Les solutions sont définies par $f(x) = -\frac{b}{a}ke^{ax} = ke^{-4x} + \frac{8}{4} = ke^{-4x} + 2$.
- Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = 5$:
  Cela revient à déterminer k k tel que $f(0) = 5 \Longleftrightarrow ke^0 + 2 = 5 \Longleftrightarrow k = 3$.
  La solution particulière cherchée est donc définie par $f(x) = 3e^{-4x} + 2$.

7.2. Équations différentielles de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

Propriété 11

✐ Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par

$$f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Exercice 5

Résolution de $y'' + 4y = 0(\omega^2 = 4$; on peut prendre $\omega = 2)$

- ✐ Les solutions sont définies par $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
- ✐ Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$:

  $f(0) = \sqrt{3} \Longleftrightarrow A\cos 0 + B\sin 0 =?3\sqrt{3} \Longleftrightarrow A =?3.$
  Pour tout x, on a $f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$.
  $f'(0) = 2 \Longleftrightarrow -2A\sin 0 + 2B\cos 0 = 2 \Longleftrightarrow 2B = 2 \Longleftrightarrow B = 1$.
  La solution particulière cherchée est donc définie par

  $$f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x).$$

8. Nombres complexes

8.1. Forme algébrique - Calculs dans $\mathbb{C}$

Définition 5

- ☞ Tout complexe s'écrit de façon unique sous la forme algébrique $z = a + ib$ (a et b réels) avec $i^2 = -1$.
- ☞ a est la partie réelle et b est la partie imaginaire .
- ☞ Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.
- ☞ Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique :
  - ✌ si le dénominateur est de la forme ib, on multiplie en haut et en bas par i ;
  - ✌ si le dénominateur est de la forme $a + ib$, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

Exemples de calculs dans $\mathbb{C}$:

- ✏ $3i(3+4i) = 9i + 12i^2 = -12 + 9i$
- ✏ $(1+2i)r = 1^2 + 2\times 1\times 2i + (2i)2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$
- ✏ $\dfrac{3}{i} = \dfrac{3\times i}{i\times i} = \dfrac{3i}{-1} = -3i$
- ✏ $\dfrac{2+i}{3+2i} = \dfrac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)((3-2i)} = \dfrac{-1-2i}{1^2+2^2} = \dfrac{-1-2i}{5}$
- ✏ Résolution de l'équation $\dfrac{1+iz}{-1+3i} = z$:
  $\dfrac{1+iz}{-1+3i} = z \Longleftrightarrow 1 + iz = (-1+3i)z \Longleftrightarrow 1 = (-1+2i)z \Longleftrightarrow z = \dfrac{1}{-1+2i} = \dfrac{1\times(-1-2i)}{(-1+2i)\times(-1-2i)} = \dfrac{-1-2i}{1^2+2^2} = \dfrac{-1-2i}{5}$

Propriété 12

Propriétés des conjugués

1. $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$
2. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$
3. $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
4. $\overline{\overline{z}} = z$
5. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
6. $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
7. $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$
8. $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z-\overline{z})$
9. Si $z = a+ib$, alors $z\overline{z} = a^2+b^2$

8.2. Forme trigonométrique - Module et arguments

- Le module de z est : $|z| = \sqrt{a^2+b2}$.
- Si $z \neq 0$ tout réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\text{partie réelle}}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{\text{partie imaginaire}}{|z|} \end{cases}$$

  est un argument de z.
  On note $\mathbf{arg}z = \theta + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Soit z le complexe de forme algébrique $a+ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors on a d'une part
$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$
et d'autre part
$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

- Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :
  Soit $z = \sqrt{3}+i$, alors $|z| = \sqrt{a^2+b2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  Donc $arg z = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. $z = \sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$
- Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :
  $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\ z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$

8.3. Notation exponentielle

Définition 6

Soit $z = x+iy$ un nombre complexe non nul (où x, y sont des réels), dont le module est $r = |z|$ et un argument est $\theta = arg(z)$. Alors on note ce nombre z sous la forme

$$z = re^{i\theta}$$

Cette écriture est appelée une notation exponentielle de z. La notation exponentielle du nombre complexe 0 est 0.

Remarque : On a la formule :

$$re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

qui relie l'écriture algébrique (à droite) à l'écriture exponentielle (à gauche). Cette formule est très importante dans les calculs que l'on sera amené à faire.

8.4. Règles de calcul en notation exponentielle

Produit de deux nombres complexes

Propriété 13

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, \theta' \in \mathbb{R}$ tout $r > 0$ et tout $r' > 0$:

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Inverse d'un nombre complexe non nul

Propriété 14

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et tout $r > 0$:

$$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Quotient de deux nombres complexes

Propriété 15

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}, \theta' \in \mathbb{R}$ tout $r > 0$ et tout $r' > 0$:

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

8.5. Formule d'Euler

8.6. Une propriété

$$\left\{\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \end{array}\right.$$

Propriété 16

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

8.7. Application à la linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de fonctions trigonométriques en une somme de fonctions.
Exemples : le formulaire officiel du Bac STI donnait deux formules de linéarisations :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \text{ et } \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

8.8. un exemple détaillé

Linéarisons $\sin 2x \times \cos 3x$

$$\begin{aligned}
\sin 2x \times \cos 3x &= \left(\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\right)\times\left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4i}(e^{i2x}-e^{-i2x})(e^{i3x}+e^{-i3x})\\
&= \frac{1}{4i}[e^{i2x}\times e^{i3x}+e^{i2x}\times e^{-i3x}-e^{-i2x}\times e^{i3x}-e^{-i2x}\times e^{-i3x}]\\
&= \frac{1}{4i}[e^{i5x}+e^{-ix}-e^{ix}-e^{-i5x}]\\
&= \frac{1}{4i}[e^{i5x}-e^{-i5x}-(e^{ix}-e^{ix})]\\
&= \frac{1}{4i}[2i\sin 5x-2i\sin x]\\
&= \frac{1}{2}\sin 5x-\frac{1}{2}\sin 5x
\end{aligned}$$

Nombres complexes et géométrie

- Pour déterminer la nature d'un triangle ABC, il suffit de calculer ses côtés avec $AB = |z_B?z_A|\ldots$,
- Pour montrer que deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\vec{U}} = k.z_{\vec{V}}$.
- Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{AB}} = k.z_{\overrightarrow{AC}}$.
- Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que
$$z_{\overrightarrow{AB}} = k.z_{\overrightarrow{CD}}.$$
- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-z_A| = r(r>0)$ est le cercle de centre A et de rayon r (car $|z?zA| = r \Longleftrightarrow AM = r)$.
- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-z_A| = |z-z_B|(z_A \neq z_B)$ est la médiatrice du segment $[AB]$ (car $|z-z_A| = |z-z_B| \Longleftrightarrow AM = BM$).

Exercice 6

Soit A et B les points d'affixe $z_A = 2+2i$ et $z_B = 4i$
La distance OA est égale à $|z_A| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
La distance OB est égale à $|z_B| = \sqrt{0^2+4^2} = 4$
La distance AB est égale à $|z_B-z_A| = |4i-(2+2i)| = |-2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

On en déduit que le triangle OAB est rectangle et isocèle en A car $AO = AB$ et $AO^2+AB^2 = OB2$. Si on veut une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$, il suffit de déterminer un argument de z_A :

$$\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Donc $\theta = arg z_A = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{4}$

9. Probabilités

9.1. Loi binomiale

Définition 7

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d' épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple : Lancer un d é avec pour issues contraires « obtenir un 6 »et « ne pas obtenir un 6 »est une épreuve de Bernoulli.
Lancer le d é 10 fois est un schéma de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .

Remarque 1

- Les deux issues contraires d'une épreuve de Bernoulli se note en général S (pour « succès«) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$est alors $(1-p)$).
- Pour s'assurer que l'on a bien à faire à un schéma de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le « succès« a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des épreuves de Bernoulli successives.

Propriété 17

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Et : $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exercice 7

Probabilité d'obtenir exactement 2 six sur 12 dés ? (Le coefficient $\binom{n}{k}$ s'obtient avec la calculatrice : n nCr k dans le menu MATH PRB)

Exercice 8

Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli :
« obtenir un 6 (probabilité : $\dfrac{1}{6}$) ».
« ne pas obtenir un 6 (probabilité : $\dfrac{5}{6}$) ».
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $\dfrac{1}{6}$.La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 »est égale à : $P(X=3) = \binom{6}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^4$.

La probabilité de n'obtenir que des « 6 »est égale à : $\left(\dfrac{1}{6}\right)^7$

La probabilité de n'obtenir aucun « 6 »est égale à : $\left(\dfrac{5}{6}\right)^7$

L'espérance de X (nombre moyen de « 6 »que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$

9.2. Loi uniforme

Définition 8

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a;b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I »est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\frac{1}{b-a}$.

Propriété 18

Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ alors pour tous réels α et β appartenant à $[a;b]$, on a :

$$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

$$p(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \frac{\alpha-a}{b-a}.$$

$$p(X \geqslant \beta) = \frac{b-\beta}{b-a}.$$

$$p(X = \alpha) = 0.$$

(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)
Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ alors l'espérance de X est égale à $\frac{a+b}{2}$.

9.3. Loi exponentielle

Définition 9

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans$[0;+\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I »est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
On a donc $p(X \in I) = \int_{X\in I} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$

Propriété 19

Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans$[0;+\infty[$, on a

$$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

$$p(0 \leqslant X \leqslant \alpha) = \int_0^\alpha \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\alpha = 1 - e^{-\lambda\alpha}.$$

$$p(X \geqslant \beta) = 1 - p(0 \leqslant X \leqslant \beta) = 1 - \int_0^\beta \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\beta = 1 - \left(1 - e^{-\lambda\beta}\right) = e^{-\lambda\beta}.$$

(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)
Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$ alors l'espérance de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Exercice 9

Exemple : La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0,+\infty[$.
La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :

$$p(X < 1000) = \int_0^{1000} 0,0006e^{-0,0006x}\,dx = \left[-e^{-0,0006.x}\right]_0^{1000} = 1 - e^{-1000\times 0,0006} = 1 - e^{-1000\times 0,0006}$$

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :

$$p(X \geqslant 500) = 1 - p(0 \leqslant X \leqslant 500) = 1 - \int_0^{500} 0,0006e^{-0,0006.x}\,dx = 1 - \left[-e^{-0,0006.x}\right]_0^{500} = 1 - \left(1 - e^{-0,0006\times 500}\right) = e^{-0.3}.$$

9.4. Loi normale

Définition 10

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I »est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Remarque 2

Remarque : L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espéranceμ. On a donc la situation suivante :

$$p(X \leqslant \mu) = p(X \geqslant \mu) = 0,5$$

Propriété 20

Si une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors pour tous réels α et β, on a :

- ✐ $p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$ = TI : DISTR (2nd+VARS); normalcdf $(\alpha, \beta, \mu, \sigma)$
  CASIO : Menu STAT; DIST; NORM; NCD avec Lower :α; Upper : $\beta; \sigma : \sigma; \mu : \mu$

- ✐ $p(X \leqslant \alpha) =$
  TI : normalcdf $(-10^{99}, \alpha, \mu, \sigma)$
  CASIO : NCD avec Lower : -10^{99}; Upper : $\alpha; \sigma : \sigma; \mu : \mu$

- ✐ p$(X \geqslant \beta) =$
  TI : normalcdf $(\beta, 10^{99}, \mu, \sigma)$
  CASIO : NCD avec
  Lower : β; Upper : $10^{99}; \sigma : \sigma; \mu : \mu$

Théorème 1

Lorsque $X_{\mu,\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$:

- ✍ $P(\mu-\sigma \leqslant X_{\mu,\sigma} \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}683$
- ✍ $P(\mu-2\sigma \leqslant X_{\mu,\sigma} \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$
- ✍ $P(\mu-3\sigma \leqslant X_{\mu,\sigma} \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$

Exercice 10

(pour tester sa calculatrice) Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir : $p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0{,}682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0{,}308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0{,}252493$

Exercice 11

Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client. $p(11{,}9 \leqslant X \leqslant 12{,}2) \approx 0{,}888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

Exercice 12

Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0{,}067$ et $p(X < 3) = 0{,}159$.
On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0{,}933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0{,}092$.

9.5. Echantillonnage

Définition 11

Intervalle de fluctuation à 95%
Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right].$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p.

Propriété 21

Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation à 95%
Étant donné une population dans laquelle l**a proportion connue d'un certain caractère est p.**
Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la fréquence réelle observée f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien p**
(dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

Exercice 13

Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question. L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0,476 ; 0,564]$ car :

$0,52-1,96\sqrt{\dfrac{0,52\times 0,48}{500}} \approx 0,476$ et $0,52+1,96\sqrt{\dfrac{0,52\times 0,48}{500}} \approx 0,564$

0,47 étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

Propriété 22

Estimation par un intervalle de confiance

On cherche à connaître une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f-1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f+1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right].$$

Cet intervalle est appelé intervalle de confiance à 95% associé à la proportion f.

Exercice 14

Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[15,6\% ; 20,3\%]$ car :

$0,18-1,96\sqrt{\dfrac{0,18\times 0,82}{1000}} \approx 0,156$ et $0,18+1,96\sqrt{\dfrac{0,18\times 0,82}{1000}} \approx 0,203$

Table des matières