Lycée l'Oiselet

TSTI2D1

Année Scolaire 2019 - 2020

Cours de Maths

Luc Giraud

Case des Maths

17 mars 2020

Mathématiques en TSTI2D 2019 - 2020

CASE DES MATHS

Cours Fonction exponentielle

1. Avant propos

Une autre façon de travailler ...

2. Objectifs de la séance

Plan de la séance 1

1. Mettre en place une nouvelle méthode de travail
2. Utiliser les propriétés du cours sur l'exponentielle pour résoudre des inéquations ...
3. Continuer un peu le cours

3. Cours ...

II Equations, inéquations

1. Equations Cours et TD de mardi et jeudi
2. Inéquations

(a) Une propriété à connaître

Théorème 1

Pour tous réels a, b ,on a :

$$e^a \leqslant e^b \iff a \leqslant b$$

(b) Quelques exemples

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{3x-1} \leqslant e^2$

Correction 1

$$\begin{aligned} e^{3x-1} \leqslant e^2 &\iff 3x-1 \leqslant 2 \\ &\iff 3x \leqslant 3 \\ &\iff x \leqslant 1 \end{aligned}$$

$S =]-\infty; 1]$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

i. $e^{\frac{x}{2}} < 3$

ii. $e^{-4x} \geqslant 0$

iii. $e^{-x} - 1 < 0$

iv. $e^{-\frac{x}{2}} > e^x$

v. $\ln x > 2$

vi. $2\ln(3x) \leqslant -4$

vii. $\ln(1-x) < 0$

Correction 2

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}} < 3 &\iff \ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right) < \ln 3 \\ &\iff \frac{x}{2} \leqslant \ln 3 \\ &\iff x \leqslant 2\ln 3 \end{aligned}$$

$S =]-\infty; 2\ln 3]$

Correction 3

Pour tout réel x on a $e^{-4x} > 0$, donc a fortiori $e^{-4x} \geqslant 0$
Donc $S = \mathbb{R}$

4. Compléments sur les limites

4.1. Quelques limites

Théorème 2. Admis pour l'instant

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0.$$

Théorème 3. Admis pour l'instant

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{expx}{x^n} = +\infty.$$

Propriété 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to -\infty} (x^n expx) = 0.$$

Démonstration

Poser $X = -x$

Propriété 2

$$\lim_{h \to 0} \frac{exp(h) - 1}{h} = 1.$$

5. Exercices du 17 mars 2020

Ex 1-2. oralement.

Ex 13 p166

1)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 & \times 5 \\ -6x + 5y = -31 & \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 15y = 45 \\ -18x + 15y = -93 \end{cases}$$

$$-8x = -48$$

$$x = \frac{-48}{-8} = 6.$$

On reporte $x = 6$ dans $2x - 3y = 9$

$2 \times 6 - 3y = 9$

$12 - 3y = 9$

$-3y = -3$

$y = 1.$

Donc le système a un seul couple solution $(6;1)$.

2) Pour résoudre $\begin{cases} 2e^x - 3e^y = 9 \\ -6e^x + 5e^y = -31 \end{cases}$ on pose $\begin{cases} X = e^x \\ Y = e^y \end{cases}$

le système s'écrit $\begin{cases} 2X - 3Y = 9 \\ -6X + 5Y = -31 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} X = 6 \\ Y = 1 \end{cases}$ qui devient $\begin{cases} e^x = 6 \\ e^y = 1 \end{cases}$

$e^x = 6 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 6 \Leftrightarrow x = \ln 6$ | $e^y = 1 \Leftrightarrow \ln e^y = \ln 1 \Leftrightarrow y = 0$

Conclusion : le système 2 a un seul couple solution $(\ln 6 ; 0)$

Ex 14 : $f(x) = e^{2x} + e^{x} - 1$.

Limite en $+\infty$:

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

Rappel : $e^{2x} = (e^{x})^2$

on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} - 1 = +\infty$

par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Limite en $-\infty$:

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

on déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} - 1 = -1$

par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Conclusion : La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$.

(Vérifier sur la calculatrice.)

6. Fonctions $x \mapsto e^{u(x)}$

3 Fonction $x \mapsto \exp(u(x))$

3.1 limite

Propriété 1.

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel qui peut être égal à $-\infty$ ou $+\infty$.

- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{u(x)} = 0$;
- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell$ un réel, alors $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{\ell}$;
- si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{u(x)} = +\infty$.

Exemple 2

- $\lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) = -\infty$ donc, $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x-1} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$ donc, $\lim\limits_{x\to 1} e^{x-1} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1) = +\infty$ donc, $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-1} = +\infty$.

3.2 Dérivée

Propriété 3.

Soit u une fonction définie dérivable sur I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \to \mathrm{e}^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I de dérivée $\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = u'(x)\,\mathrm{e}^{u}(x)$.

Exemple 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$. Le polynôme u défini par $u(x) = x^2+1$ est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u'(x) = 2x$ donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$.

3.3 Primitive

Propriété 5.

Soit u une fonction définie dérivable sur I de $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ est $\mathrm{e}^{u(x)}$.

Exemple 6

Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3\,\mathrm{e}^{-3x+\pi}$ est $F(x) = \mathrm{e}^{-3x+\pi}$.

Exercice 1 **(Dérivée d'une fonction du type $u \mapsto \ln(u)$)**

Calculer la fonction dérivée des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \ln(x+1)$ sur $]-1\,,+\infty[$
2. $f(x) = \ln(x^2+2x+3)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)$ sur $]-\infty\,,-1[$

Exercice 2 **(Primitive d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$)**

Calculer la primitive des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{3}{3x-6}$ sur $]2\,,+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{4e^x}{2e^x+8}$ sur $]-4\,,+\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+5}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 **(Limites d'une fonction du type $u \mapsto \ln(u)$)**

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f :

1. $f(x) = \ln(x-2)$ sur $]2\,,+\infty[$
2. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0\,,+\infty[$
3. $f(x) = \ln(x) - 2$ sur $]0\,,+\infty[$

Exercice 4 **(Équations comportant un logarithme)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+3) = \ln(4-x)$
2. $\ln(x) = -3$
3. $\ln(x+1) = 7$
4. $\ln(x) = 2$
5. $\ln(2x-1) = \ln(4-x)$
6. $\ln(3x-9) = 0$

Exercice 5 **(Inéquations comportant un logarithme)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+2) \leq 0$
2. $\ln(x-3) \geq 0$
3. $\ln(x) + 2 \leq 0$
4. $\ln(x) - 3 \geq 0$
5. $\ln(2x-5) + \ln(x) = \ln(3)$
6. $2\ln(x+1) - \ln(4x+4) = -\ln(2)$

Exercice 6 **(Dérivée d'une fonction du type $u \mapsto \exp(u)$)**

Calculer la fonction dérivée des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = e^{x+1}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = e^{x^2+2x+3}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = 3e^{\frac{2}{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 7 **(Primitive d'une fonction du type $u \mapsto u' \exp(u)$)**

Calculer la primitive des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = 2e^{2x-6}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = -6e^{3x+8}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = (2x+3)e^{x^2+3x-5}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 **(Limites d'une fonction du type $u \mapsto \exp(u)$)**

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f :

1. $f(x) = e^{x-1}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0\,,+\infty[$
3. $f(x) = e^x - 2$ sur $]0\,,+\infty[$

Exercice 9 **(Équations comportant une exponentielle)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{x+3} = e^{4-x}$
2. $e^x = -3$
3. $e^{x+1} = 7$
4. $e^x = 2$
5. $3e^x - 1 = 5$
6. $-2e^x + 6 = 5$

Exercice 10 **(Inéquations comportant une exponentielle)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{x+2} \leq 0$
2. $e^x \geq 2$
3. $4 - e^x \leq 0$
4. $e^{-3x+2} < 2$
5. $-e^x + 5 > 0$
6. $3e^x - 1 \leq 3$

7. *Exercices du livre*

Simplifier une expression avec une exponentielle

Simplifier l'écriture des expressions suivantes (exercices **1** à **3**).

1. +

a) $\ln e^{-1}$;

b) $\ln e^2$;

c) $\ln \sqrt{e}$;

d) $\ln \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

CORRIGÉ P. 385

2. +

a) $e^{\ln 2}$;

b) $e^{-\ln 3}$;

c) $e^{2\ln 2}$.

CORRIGÉ P. 385

3. +

a) $e^{\ln 3}$;

b) $\ln \dfrac{1}{e}$;

c) $e^{\frac{1}{2}\ln 3}$;

d) $e^{1+\ln 2}$;

e) $e^{-\ln 2}$;

f) $e^{-2\ln 3}$.

Résoudre une équation, une inéquation, un système

4. +

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

a) $e^x = 3$;

b) $e^x + 1 = 0$.

CORRIGÉ P. 385

5. +

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

a) $e^x = 1$;

b) $e^x = 2$.

Exercices

6. +

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 5x + 4 = 0$.

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$.

Méthode : *Remarquer qu'en posant $X = e^x$, l'équation du **2** s'écrit : $X^2 - 5X + 4 = 0$. En désignant par X_1 et X_2 les solutions de l'équation du second degré du **1**, résoudre chacune des équations $e^x = X_1$ et $e^x = X_2$.*

CORRIGÉ P. 386

7. +

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.

2. En déduire la résolution de l'équation d'inconnue t : $e^{2t} + e^t - 2 = 0$.

▶ **Conseil :** *Procéder comme à l'exercice 6.*

8. +

Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation suivante.

a) $\ln x = 2$;
b) $\ln x = 3$;
c) $\ln 3x = \frac{1}{2}$;
d) $\ln 4x = 4$.

▶ **Rappel :** *Pour tout nombre réel positif a, $\ln a = b$ équivaut à $a = e^b$.*

CORRIGÉ P. 386

9. + Avec une équation du second degré

Résoudre chacune des équations suivantes.

a) $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$;
b) $2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0$.

Méthode : *Poser $\ln x = X$. Déterminer les solutions X_1 et X_2 de l'équation d'inconnue X. Résoudre ensuite les équations $\ln x = X_1$ et $\ln x = X_2$.*

10. +++ Avec une équation du troisième degré

On considère le polynôme $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$ de la variable réelle x.

1. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $P(x) = (x - 1)(4x^2 + 4x + 1)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^3 - 3x - 1 = 0$.

3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4e^{3x} - 3e^x - 1 = 0$.

b) Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation (ln étant le logarithme népérien) : $4(\ln x)^3 - 3(\ln x) - 1 = 0$.

11. + Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante.

a) $e^x \geq 3$;
b) $e^x \geq -1$;
c) $e^{2x} \geq 5$.

Méthode : *Mettre, lorsque c'est possible, chacune des inéquations précédentes sous la forme $e^a \geq e^b$ équivalente à $a \geq b$.*

CORRIGÉ P. 386

12. ++ Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

a) $e^x \geq 2$;
b) $2e^x - 1 \geq 0$.

13. ++ Système

1. Déterminer le couple (x, y) de nombres réels solution du système :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ -6x + 5y = -31. \end{cases}$$

2. Déduire du **1.** la résolution du système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 2e^x - 3e^y = 9 \\ -6e^x + 5e^y = -31. \end{cases}$$

Déterminer des limites

14. +

Déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$.

CORRIGÉ P. 386

15. +

Déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - x$.

▶ *Se reporter à l'exercice résolu 1 du cours.*

CORRIGÉ P. 386

16. +

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 3x$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 3\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

17. ++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - e^x$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

▶ *Avec prise d'initiative.*

18. ++

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

2. Déterminer la limite de f en 0.

▶ **Indication :** *Pour la limite en $+\infty$, on pourra mettre en facteur e^x au dénominateur (qui est le terme qui semble jouer le rôle le plus important pour les grandes valeurs de x), puis simplifier par e^x.*

19. +++

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1 - e^x}{2 + e^x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

▶ *Avec prise d'initiatives.*

Exercices

Limites de fonctions composées de la forme e^u (exercices **20** à **24**).

20. ++

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 10 - 20e^{-0,2x}$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{150}{1+e^{1-x}}$.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu au **a)**.

▶ *On peut se reporter à l'exercice résolu 2 du cours.*

CORRIGÉ P. 386

21. ++ Recherche d'asymptote

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 + e^{-0,1t+2}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{t \to -\infty} (-0,1t + 2)$.

b) En déduire $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t)$.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

b) Déduire du **a)** que la courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote dont on donnera une équation.

22. ++

Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. **b)** $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

23. ++

Dans chacun des cas suivants, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

a) $f(x) = 2e^{0,01x}$;
b) $f(x) = -3e^{0,02x}$;
c) $f(x) = 10 + e^{-0,10x}$;
d) $f(x) = 20 - 10e^{-0,4x}$.

24. ++ Interpréter graphiquement une limite

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{100}{1+e^{3-x}}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au **1.**

Calculer la dérivée de fonctions

Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle donné où elle est définie et dérivable (exercices **25** à **33**).

▶ **Conseil :** *pour chacun des exercices* **25** *à* **33**, *on peut vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*

25. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

CORRIGÉ P. 386

26. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

CORRIGÉ P. 386

27. +

f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

CORRIGÉ P. 386

28. + Dérivée de e^u

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - e^{-x}$.

CORRIGÉ P. 386

29. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^x$.

30. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x(e^x - 2)$.

31. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

32. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+1}$.

33. ++ La variable est t

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2e^{0,01t}$;
b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-0,2t+1}$;
c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 10 + 0,02(-t + 1)e^t$;
d) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (-t + 3)e^{-t}$;
e) f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{12}{1+10e^{-0,26t}}$;
f) f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 10(1,2)^t$.

▶ **Indication :** *Pour tout a de $]0, +\infty[$ et tout b de $\mathbb{R}$, $a^b = e^{b\ln a}$.*

Exercices

34. ++ **Avec un logiciel de calcul formel**

Justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$ qui a été obtenue avec une calculatrice équipée d'un logiciel de calcul formel.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$, $f'(x) = (1 + x)e^x$;

b) pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$, $f'(x) = (-2x + 1)e^{-x}$;

c) pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^2e^{-x}$,
$f'(x) = (-x + 1)(x + 1)e^{-x}$.

> **Les calculs de dérivées au baccalauréat**
> *Les calculatrices équipées d'un logiciel de calcul formel donnent directement f'(x). Ainsi, il n'est pas rare que dans les sujets d'examens on donne f'(x), comme dans l'exercice* **34**, *pour ne pas avantager les détenteurs de ce type de calculatrices.*

Déterminer des primitives

En utilisant les résultats du cours, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ou sur l'intervalle I (exercices **35** à **43**).

> **Conseil :** *pour chacun des exercices suivants, on peut vérifier le résultat à l'aide d'un logiciel de calcul formel.*

35. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{5}$.

CORRIGÉ P. 386

36. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + e^x$.

> **Conseil :** *pour chacun des exercices* **37** *à* **43**, *procéder comme dans l'exercice résolu 4 du cours.*

37. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x+3}$.

CORRIGÉ P. 386

38. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$.

CORRIGÉ P. 386

39. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{0,05x}$.

CORRIGÉ P. 386

40. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^x + 2e^{-x}$.

41. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$.

42. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x+2}$.

43. +

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2+1}$.

44. +++

Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction
$F : x \mapsto (ax + b)e^x$
soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$f : x \mapsto (2x + 1)e^x$.

> *Avec prise d'initiatives.*

Étudier les variations d'une fonction

45. ++ **Avec une recherche d'asymptote**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \dfrac{x}{2} - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 5 cm.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$.

c) Vérifier que, pour tout nombre réel x non nul,
$f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f.

a) Déterminer $f'(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - \dfrac{1}{2} \geq 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ quand x varie dans $\mathbb{R}$.

c) Calculer la valeur exacte de $f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$.

d) Établir le tableau de variation de f.

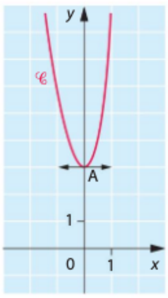
3. Construire la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

CORRIGÉ P. 387

46. +++ **La courbe représentative est donnée**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^{2x} + be^{-x}$ où a et b sont deux réels à déterminer. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0 est horizontale.



A. 1. Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction des nombres a et b.

2. Lire sur le graphique $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercices

3. En déduire un système de 2 équations à 2 inconnues. Calculer les valeurs de a et de b.

B. On suppose que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5. **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{3x} - 1 \geq 0$.

b) Montrer que $f'(x) = 2e^{-x}(e^{3x} - 1)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

c) En déduire le signe de $f'(x)$.

d) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

47. +++ La Tour Eiffel, vue de profil…

La Tour Eiffel repose sur une base carrée de 124 mètres de côté. Une section quelconque par un plan parallèle au plan de la base est un carré. À 309 mètres d'altitude la plateforme est un carré de 12 mètres de côté.

Sur la figure on a dessiné la section de la Tour Eiffel par un plan vertical passant par une diagonale du carré de la base. La courbe $\mathscr{C}$ (en trait plein) de la figure est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction f définie sur $[0\ ,309]$ par :

$$f(x) = ae^{bx}$$

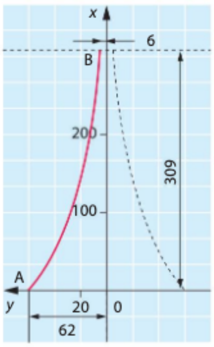
où a et b sont deux constantes réelles qu'on se propose de déterminer. Le choix d'une telle fonction a été fait par Gustave Eiffel pour optimiser les contraintes.

1. **a)** Déterminer la constante a en utilisant le fait que $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées $(0\ ,62)$. Ici l'axe des abscisses est vertical et l'axe des ordonnées horizontal, orienté vers la gauche.

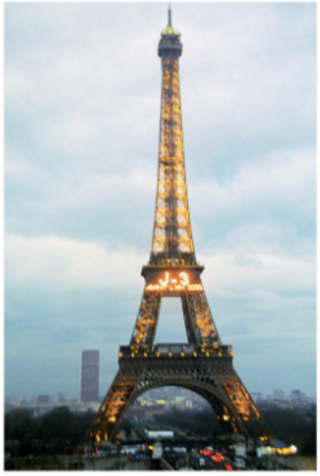
b) Déterminer une valeur approchée de b arrondie à 10^{-4} en utilisant le fait que $\mathscr{C}$ passe par le point B de coordonnées $(309, 6)$.

2. Dans cette question on admet que, pour tout x de $[0, 309]$, $f(x) = 62e^{-0{,}007\,6x}$.

a) Déterminer, à un mètre près, la longueur du côté de la section carrée de la Tour Eiffel à 100 mètres d'altitude.



b) Déterminer, à un mètre près, l'altitude à laquelle la section est un carré de 50 mètres de côté.



48. ++ Exponentielle en mécanique

La température θ exprimée en degrés Celsius du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps t de fonctionnement, exprimé en minutes. On pose $\theta = f(t)$ où f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $t \mapsto 25 - 10e^{-kt}$ et k une constante réelle.

1. Déterminer k pour que la température du lubrifiant au bout de 5 minutes de fonctionnement soit de 19 °C.

2. Quelle est la température du lubrifiant lorsque le moteur ne fonctionne pas ?

3. Étudier les variations de la fonction f.

4. Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ unités : en abscisse, 5 cm pour 10 minutes et, en ordonnée, 1 cm pour 2,5 °C.

5. Comment interpréter physiquement l'existence d'une asymptote pour $\mathscr{C}$ lorsque t augmente indéfiniment ?

6. Représenter $\mathscr{C}$ pour t appartenant à $[0, 20]$, à l'aide d'une calculatrice ou du tableur.

49. ++ Exponentielle en physique

Décharge d'un condensateur dans un résistor.

La tension $V(t)$ aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans un résistor varie en fonction du temps t suivant la loi $V(t) = V_0 \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$, où V_0 est la tension initiale, R la résistance du résistor, C la capacité du condensateur.

On donne $C = 12\ \mu F$ (microfarads). Calculer R en ohms, sachant que la tension est tombée au $\dfrac{1}{10}$ de sa valeur initiale au bout de 2 secondes.

Exercices

50. +++ Radioactivité

Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux suivant la loi $N(t) = N(0)e^{-kt}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N(0) = 1\,000$, on a $N(1) = 937$. Arrondir à 10^{-3}.

2. La *période* d'un élément radioactif est le temps au bout duquel il reste la moitié de ses atomes. Calculer la période du thorium. Arrondir à la minute.

51. +++ Ça chauffe !

Lorsqu'un système de production de pâte à papier fonctionne, il dégage de la chaleur et réchauffe le local dans lequel il se trouve. Une étude de la température de ce local a été effectuée à partir de lois physiques.

A. *Étude d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$ par $f(t) = 22 - 4{,}5e^{1-0{,}5t}$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

B. *Étude de la température du local*

La fonction f permet de calculer la température du local $f(t)$, exprimée en degrés Celsius, en fonction du temps t, exprimé en heures, écoulé depuis la mise en route du système.

1. Calculer la température du local lorsque le système a fonctionné 1 heure et demie. Arrondir à 10^{-1}.

2. Calculer le temps, arrondi à la minute, au bout duquel le local atteint la température de 19 °C.

3. Donner une interprétation du résultat du **A.1.**.

52. ++ Fonction logistique et équipement des ménages

A. *Étude de la fonction f* définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{1+4{,}9\,e^{-0{,}125t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}125t} = 0$. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.

En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

2. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

3. a) Calculer la dérivée de f et vérifier que

$$f'(t) = \frac{0{,}6125\,e^{-0{,}125t}}{(1+4{,}9\,e^{-0{,}125t})^2}.$$

b) Établir le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$.

5. a) Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0{,}5$. Faire apparaître les traits utiles sur le graphique.

b) Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 0{,}5$. Arrondir à l'unité.

B. *Application*

Une étude statistique a établi qu'à partir de l'année 1990, le pourcentage des ménages équipés d'un four à micro-ondes, dans un appartement, est donné approximativement par la formule : $f(t) = \dfrac{1}{1+4{,}9\,e^{-0{,}125t}}$ ou t désigne le nombre d'années écoulées depuis 1990.

Par exemple $f(0) \approx 0{,}17$; en 1990 il y avait 17 % des ménages équipés d'un four à micro-ondes.

1. Calculer le pourcentage des ménages ayant cet équipement en 2010. Arrondir à 10^{-2}.

2. Déduire de la partie **A.**, l'année à partir de laquelle 50 % des ménages ont été équipés d'un four à micro-ondes.

> **Les fonctions logistiques**
>
> • *On appelle* ***fonctions logistiques*** *des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(t) = \dfrac{A}{1+ae^{-kt}}$ *où A et k sont des constantes réelles positives et a une constante réelle de signe quelconque.*
>
> • *Ces fonctions sont utilisées en biologie, pour décrire l'évolution de certaines populations dans un environnement limité (elles furent proposées pour la première fois en 1837 par le biologiste et mathématicien belge Verhulst pour décrire l'évolution d'une population à « croissance limitée »), en biologie, en psychologie, en économie…*
>
> • *En économie, on utilise souvent de telles fonctions pour décrire l'évolution au cours du temps du taux d'équipement des foyers pour des biens durables (comme par exemple : le téléphone, l'automobile, la télévision, le réfrigérateur, le congélateur, le lave-linge, le lave-vaisselle, le téléphone mobile, l'ordinateur…).*

53. ++ Une chaînette

> *La* ***chaînette*** *est la courbe suivant laquelle se tend un fil (ou un câble) homogène, pesant, flexible et inextensible, suspendu par ses extrémités à deux points fixes.*

On démontre en mécanique et on admet que, rapportée à un repère orthonormé convenable, la chaînette admet une équation de la forme : $y = \dfrac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

> *Pensez aux lignes à haute tension de RTE (Réseau de transport d'électricité).*

Faites le point !

RÉPONSES P. 390

QCM *Indiquez sur votre copie, pour chaque question posée, la bonne réponse (ou une bonne réponse) parmi les propositions de l'énoncé ; aucune justification n'est demandée.*

QCM interactifs 68-69-70-71

71. ++ Relations fonctionnelles, équations, inéquations

1	$(e^x)^2 \times (e^{-x})^2$ est égal à :
a	$2\,e^{x^2}$
b	e^{4x}
c	1

2	3 est solution de l'équation :
a	$e^{-x} = -3$
b	$e^{\ln x} = 3$
c	$\ln x = -\ln 3$

3	$\ln y = 0{,}03x + 3{,}44$ si et seulement si $y =$:
a	$3{,}44\,e^{0{,}03x}$
b	$e^{0{,}03x+3{,}44}$
c	$e^{0{,}03x} \times e^{3{,}44}$

4	L'inéquation $\ln x \geq 2$ a pour ensemble de solutions :
a	$[2e, +\infty[$
b	$]0, e^2]$
c	$[e^2, +\infty[$

72. ++ Limites

Dans chaque question, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1	$f(x) = e^x + x$
a	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
b	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
c	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2	$f(x) = x - e^x$
a	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
b	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
c	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3	$f(x) = e^{2x+1}$
a	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
b	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
c	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

73. ++ Dérivées

Dans chaque question, f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est sa fonction dérivée.

1	$f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$
a	$f'(x) = 2 + e^{-x}$
b	$f'(x) = 3 + e^{-x}$
c	$f'(x) = 2 - e^{-x}$

2	$f(x) = xe^{-x}$
a	$f'(x) = e^{-x}$
b	$f'(x) = -e^{-x}$
c	$f'(x) = (1 - x)\,e^{-x}$

3	$f(x) = e^{2x+1}$
a	$f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$
b	$f'(x) = 2e^{2x+1}$
c	$f'(x) = e^{2x+1}$

74. ++ Primitives

Dans chaque question, f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

1	$f(x) = x - 3 + e^x$
a	$F(x) = 1 + e^x$
b	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + e^x$
c	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3 + e^x$

2	$f(x) = e^{2x+1}$
a	$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$
b	$F(x) = e^{2x+1}$
c	$F(x) = 2e^{2x+1}$

75. +++

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal et par f' la fonction dérivée de f. Le tableau de variation de la fonction f est donné ci-dessous.

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2 + 3$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Dans l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = e^2$ admet :

a) aucune solution ;

b) une unique solution ;

c) deux solutions.

2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1{,}5)$ admet un coefficient directeur :

a) strictement positif ;

b) strictement négatif ;

c) nul.

3. $f(-\ln(2))$ est égal à :

a) $-2\ln 2 + 3$;

b) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$;

c) $-2\ln 2 + 1$.

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

a) $y = 2x + 2$; **b)** $y = 2x + 1$; **c)** $x = 0$.

▶ *Question demandant une certaine forme d'autonomie.*

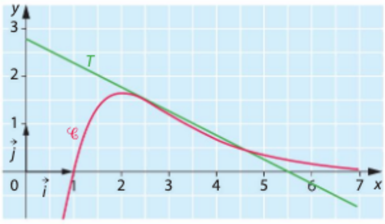
Exercices
Pour le baccalauréat

Les exercices pour le baccalauréat sont des exercices qui ont été proposés (ou pourraient avoir été proposés) dans l'épreuve de mathématiques du baccalauréat STI2D – STL.

Étudier une fonction définie à l'aide de la fonction $x \mapsto e^x$

76. +++ **Déterminer et étudier une fonction**

Sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative, dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



A. *Étude graphique*

La droite T est tangente à $\mathscr{C}$ au point A(2,5 ; 1,5) et d'ordonnée à l'origine 2,75.

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$;

2. $f'(2,5)$;

3. Une équation de la tangente T ;

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

B. *Modélisation*

On admet qu'il existe deux réels a et b tels que : pour tout réel x, $f(x) = (ax + b)e^{-x+2,5}$.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.

2. Exprimer en fonction des réels a et b les nombres suivants :
$f(1)$; $f'(2,5)$.

3. Déduire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par a et b.

4. Résoudre de système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

C. *Étude algébrique*

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (x - 1)e^{-x+2,5}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a) Montrer que pour tout réel x,
$f(x) = e^{2,5}\left(\dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

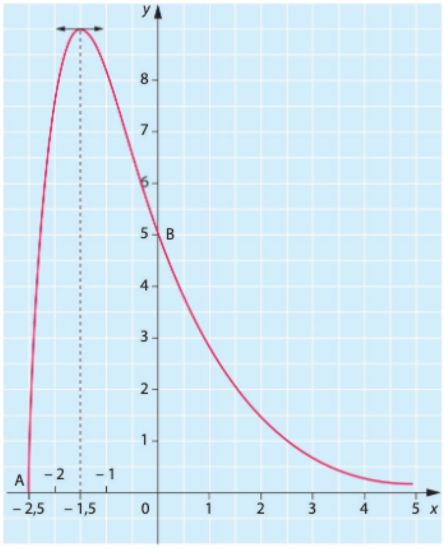
3. a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b) Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

CORRIGÉ P. 398

77. +++ **Détermination d'une fonction**

Le but de l'exercice est de modéliser le contour de la plaque représentée dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm (voir la figure).



On se propose de représenter ce contour par une fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\,;5]$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ où a, b et c sont trois nombres réels.

On précise que les points A(– 2,5 ; 0) et B(0 ; 5) appartiennent à la courbe. De plus, la tangente à la courbe au point d'abscisse – 1,5 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Utiliser les données pour préciser $f(-2,5)$, $f(0)$ et $f'(-1,5)$.

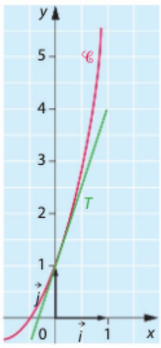
2. a) En déduire le système que doivent vérifier les réels a, b et c.

b) Résoudre ce système et déterminer la fonction f cherchée.

78. +++

Les deux parties A et B sont indépendantes.

A. a et b étant deux nombres réels, on considère la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x) = (ax + b)e^x$.
On note f la fonction dérivée de F sur $\mathbb{R}$ ($F' = f$). $\mathscr{C}$ est la courbe représentant la fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm), T est la tangente au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.
Le graphique ci-contre représente une partie de $\mathscr{C}$ et de T.



1. Déterminer par le calcul, en fonction de a et b, $f(x)$, puis $f'(x)$.

2. Lire sur le graphique $f(0)$ et $f'(0)$.
En déduire les valeurs de a et b.

B. Soit g la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x) = (2x + 1)e^x$.
Justifier les informations contenues dans le tableau de variation suivant (valeurs, sens de variation et limites) :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-2e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

79. +++ Fonction donnée par son tableau de variation

La fonction numérique f a pour tableau de variation :

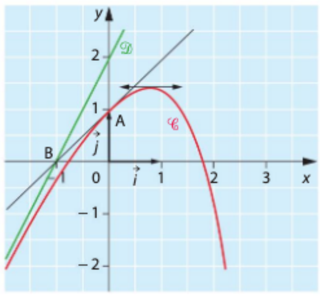
x	-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1. D'après la lecture de ce tableau, répondre aux questions suivantes :
a) Quelles sont les limites de f aux bornes de $]-1, +\infty[$?
b) Donner les intervalles de longueur maximum où f est monotone et préciser le sens de variation de f sur chacun de ces intervalles.
c) La fonction f admet-elle un extremum sur $]-1, +\infty[$?
Si oui, quelle est sa valeur ?
d) Quel est le signe de f sur $]-1, +\infty[$?

2. On admet que la fonction f est l'une des quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, définies sur $]-1, +\infty[$ par :
$f_1(x) = -\ln(x^2 - 2x + 4)$; $f_2(x) = e^{-x^2}$;
$f_3(x) = -e^{(-x^2+2x)}$; $f_4(x) = \ln\dfrac{2x+2}{x^2+3}$.
Calculer $f_1(1)$
Quel est le signe de f_2 ?
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x)$. Conclure.

80. +++ Lectures graphiques, résolution d'une équation

Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé (unité 2 cm).
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty, +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 2 - e^x$.
La droite $\mathscr{D}$ a pour équation : $y = 2x + 2$.
Le point A a pour coordonnées $(0, 1)$, le point B $(-1, 0)$.
On se propose dans ce problème :
– d'étudier graphiquement certaines propriétés de f,
– de justifier par le calcul l'étude des propriétés de f et le tracé de $\mathscr{C}$.



A. *Étude graphique*

1. a) Préciser $f(0)$.
b) Déterminer une équation de la droite (AB).
c) La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
Préciser $f'(0)$.

2. Justifier l'affirmation suivante : l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions α et β ($\alpha < \beta$).
Par lecture graphique, donner un encadrement de chacune de ces solutions par deux entiers consécutifs.

B. *Étude de f*

1. a) Vérifier que, pour tout x non nul,
$f(x) = 2 + x\left(2 - \dfrac{e^x}{x}\right)$.
Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Table des matières