Nom :	DS 05 — CASE DES MATHS	TSTI2D1 — Janv.2020
Prénom :		Devoir n° 10 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 3 pages.

Exercice 1 — 5 points

Je connais mon cours !

2.5 pts **1**

2.5 pts

Conditions	$f(x) =$	$F(x) =$
$a \in \mathbb{R}$	a	$ax + C$
$x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x \in]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$
$x \in]0;+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$x \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + C$
$x \in \mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + C$

2 u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Conditions	$f =$	$F =$
$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$u^n \times u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$u(x) \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$
$u(x) > 0$ sur I	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$
	$u' \times \cos u$	$\sin u + C$
	$u' \times \sin u$	$-\cos u + C$

Exercice 2 — 13 points

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1.5 pt **1** $a(x) = 5x^4 + 12x^2 - 6x + 1$

Les primitives de a sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions A définies par $A(x) = x^5 + 4x^3 - 3x^2 + x + C$.

1.5 pt **2** $b(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}$

On écrit $b(x) = - \times \frac{1}{x^2} + 2x^{-4}$, donc $B(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{1}{x} - \frac{2}{3x^3}$

Les primitives de b sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions B définies par $B(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{3x^3} + C$.

2 pts **3** $c(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

$C(x) = \frac{4}{3} \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - 4 \times 2\sqrt{x}$

$$\boxed{\text{Les primitives de } c \text{ sur }]0;+\infty[\text{ sont les fonctions } C \text{ définies par } C(x)=\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-8\sqrt{x}+C.}$$

2 pts **4** $d(x)=(2x+9)^4$

- On pose $u(x)=2x+9$
- $u'(x)=2$
- $d=u^4\times\dfrac{u'}{2}=\dfrac{1}{2}u'u^4.$
- On déduit une primitive $D=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u^{4+1}}{4+1}=-\dfrac{1}{10}u^5$

$$\boxed{\text{Les primitives de } d \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } D \text{ définies par } D(x)=\frac{1}{10}(2x+9)^5+C.}$$

2 pts **5** $e(x)=\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+1}}$

- On pose $u(x)=x^2+1$
- $u'(x)=2x$
- $e=\dfrac{3u'}{\sqrt{u}}=3\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}.$
- On déduit une primitive $E=3\times2\sqrt{u}=6\sqrt{u}$

$$\boxed{\text{Les primitives de } e \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } E \text{ définies par } E(x)=6\sqrt{x^2+1}+C.}$$

2 pts **6** $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos(3x+7)$

- On pose $u(x)=3x+7$
- $u'(x)=3$
- $f=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'}{3}\times\cos u=\dfrac{1}{9}\times u'\cos u.$
- On déduit une primitive $F=\dfrac{1}{9}\times\sin u$

$$\boxed{\text{Les primitives de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } F \text{ définies par } F(x)=-\frac{1}{9}\sin(3x+7)+C.}$$

2 pts **7** $h(x)=(x+2)(x^2+4x+1)^3$

- On pose $u(x)=x^2+4x+1$
- $u'(x)=2x+4=2(x+2)$, donc $x+2=\dfrac{1}{2}u'(x)$
- $g=\dfrac{1}{2}u'u^3.$
- On déduit une primitive $G=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u^{3+1}}{3+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u^4}{4}=\dfrac{1}{8}u^5$

$$\boxed{\text{Les primitives de } h \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } H \text{ définies par } H(x)=\frac{1}{8}(x^2+4x+1)^4+C.}$$

Exercice 3 — 3 points

Calculer les intégrales suivantes :

1 pt **1** $I = \int_0^2 x^3 \, dx$

- On pose $f(x) = x^3$
- F une primitive de f : $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$
-

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x^3 \, dx \\ &= \int_0^2 f(x) \, dx \\ &= F(2) - F(0) \\ &= \frac{2^4}{4} - 0 = 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \int_0^2 x^3 \, dx = 4}$$

1 pt **2** $J = \int_0^1 2x + 1 \, dx$

- On pose $f(x) = 2x + 1$
- F une primitive de f : $F(x) = x^2 + x$
-

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 2x + 1 \, dx \\ &= \int_0^1 f(x) \, dx \\ &= F(1) - F(0) \\ &= 1^2 + 1 - 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \int_0^1 2x + 1 \, dx = 2}$$

1 pt **3** $J = \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx$

- On pose $f(x) = \sin(x)$
- F une primitive de f : $F(x) = -\cos(x)$
-

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx \\ &= F(\pi) - F(0) \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{J = \int_0^{\pi} \sin(x) \, dx = 2}$$

Exercice 4 — 7 points

La courbe $\mathcal{C}$ de la figure est la courbe représentative, dans un repère orthogonal (unités graphiques :2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées) d'une fonction f définie sur I =[- 1,3]. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses, ainsi que celle au point d'abscisse 0.

1 pt **1** À partir du graphique, construire le tableau de variation de f.

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

1.5 pt **2** Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$, $f(-1)$ et $f(1)$.

$$\boxed{f(-1) = 0, f(0) = 4 \text{ et } f(1) = 2}$$

2 pts **3** On admet que la fonction f est définie sur $[-1,3]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a, b, c sont des constantes réelles à déterminer.À l'aide des résultats obtenus à la question 2., calculer la valeur des nombres réels a, b et c.

- $$\begin{aligned} f(0) = 4 &\iff a \times 0^3 + b \times 0^2 + c = 4 \\ &\iff c = 4 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(1) = 2 &\iff a \times 1^3 + b \times 1^2 + c = 2 \\ &\iff a + b + 4 = 2 \\ &\iff a + b = -2 \end{aligned}$$

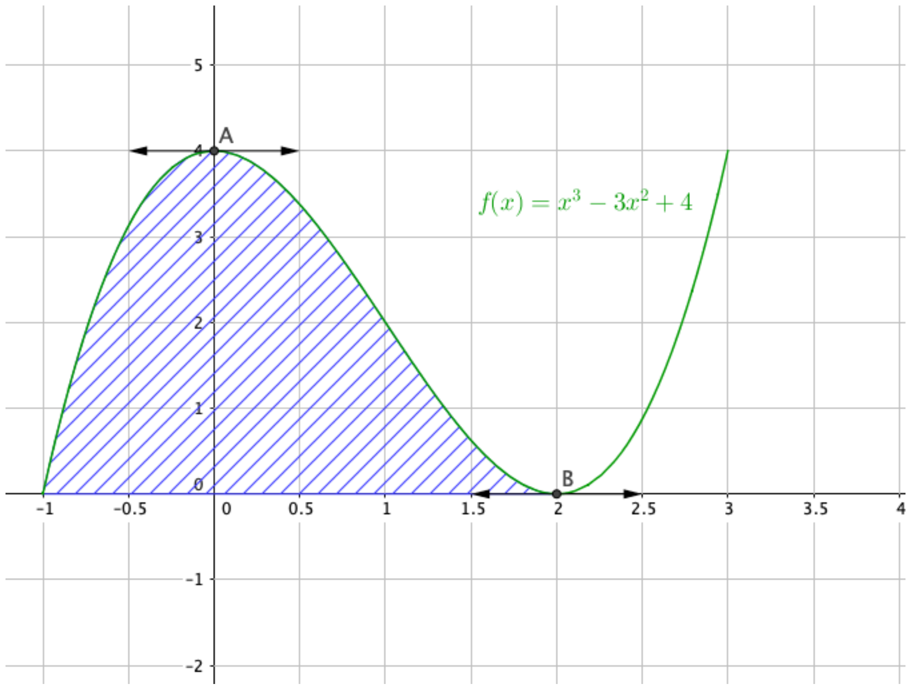
- $$\begin{aligned} f(-1) = 0 &\iff a \times (-1)^3 + b \times (-1)^2 + c = 2 \\ &\iff -a + b + 4 = 0 \\ &\iff -a + b = -4 \end{aligned}$$

On résout le système

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ -a + b = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -2 \\ 2b = -6 \end{cases} \begin{cases} b = -3 \\ a = -2 - b = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de I, on a } f(x) = x^3 - 3x^2 + 4}$$

2.5 pts **4** On admet par la suite, que pour tout x de I, on a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan hachurée.



D'après le graphique, la fonction f est positive sur $[-1;2]$, l'aire hachurée vaut donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(2) - F(-1) \\
&f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \\
&F(x) = \tfrac{x^4}{4} - x^3 + 4x \\
F(2) &= \tfrac{2^4}{4} - 2^3 + 4\times 2 \\
&= 4 - 8 + 8 = 4 \\
F(-1) &= \tfrac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4\times(-1) \\
&= \tfrac{1}{4} + 1 - 4 = \tfrac{1}{4} - 3 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{12}{4} = -\tfrac{11}{4} \\
\\
\mathcal{A} = &= 4 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{27}{4}
\end{aligned}$$

$\mathcal{A} = \frac{27}{4}u.a.$, ici l'unité d'aire vaut 2 cm $\times$ 1cm = 2cm^2.
$\mathcal{A} = \frac{27}{4}u.a. = \frac{27}{4} \times 2cm^2 = 13,5cm^2$

$$\boxed{\mathcal{A} = 13,5\ cm^2}$$