Nom : .... *Prénom :*	**DS 04** CASE DES MATHS	TSTI2D1 Oisclet *Déc. 2019* *Devoir n° 8* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — 2 points

Soit le nombre complexe $z = 2 - 3i$. Compléter :

2 pts

$$\mathfrak{Re}(z) = 2 ; \mathfrak{Im}(z) = -3 ; |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Exercice 2 — 4,5 points

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

3 pts

$$z_1 = \frac{2+i}{3-2i} \quad ; \quad z_2 = \frac{-2+3i}{-1+i}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2+i}{3-2i} \\ &= \frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} \\ &= \frac{6+4i+3i-2}{(3^2+2^2)} \\ &= \frac{4+7i}{13} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_2 &= \frac{-2+3i}{-1+i} \\ &= \frac{(-2+3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} \\ &= \frac{2+2i-3i+3}{(1^2+1^2)} \\ &= \frac{5-i}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 = \frac{4+7i}{13} \text{ et } z_2 = \frac{5-i}{2}}$$

1.5 pt Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $(1+i)z + 2 = 3z - 1$

$$\begin{aligned} (1+i)z + 2 = 3z - 1 &\iff (1+i)z - 3z = -1 - 2 \\ &\iff (1+i-3)z = -3 \\ &\iff (-2+i)z = -3 \\ &\iff z = \frac{-3}{-2+i} = \frac{3}{2-i} \\ &\iff z = \frac{3(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &\iff z = \frac{6+3i}{2^2+1^2} = \frac{6+3i}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{6+3i}{5}\right\}}$$

Exercice 3 — 2 points

Calculer le module des nombres complexes suivants :

2 pts

$$z_1 = \frac{1}{2} + 2i \quad ; \quad z_2 = i(1-i)$$

$$\begin{aligned}
|z_1| &= \left|\tfrac{1}{2} + 2i\right| \\
&= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{4} + 4} \\
&= \sqrt{\tfrac{17}{4}} \\
|z_1| &= \frac{\sqrt{17}}{2}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
z_2 &= i(1-i) \\
&= i - i^2 \\
&= 1 + i \\
|z_2| &= |1+i| \\
&= \sqrt{2} \\
|z_2| &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que pour calculer le module de z_2 , on a intérêt à utiliser les propriétés des modules :

- $$\begin{aligned}
|z_2| &= |i(1-i)| \\
&= |i| \times |(1-i)| && \text{car } |z \times z'| = |z| \times |z'| \\
&= \sqrt{0^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Exercice 4 — 8 points

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = -2 + i$ et $z_C = 3 + 2i$.

1 pt **1** Placer dans le repère dessiné sur le verso de la feuille les points A, B et C :

2 pts **2** Calculer les distances AB et BC.

$$\begin{aligned}
AB &= |z_B - z_A| \\
&= |-2 + i - (1 - i)| \\
&= |-2 + i - 1 + i| \\
&= |-3 + 2i| \\
&= \sqrt{3^2 + 2^2} \\
AB &= \sqrt{13}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
AC &= |z_C - z_A| \\
&= |3 + 2i - (1 - i)| \\
&= |3 + 2i - 1 + i| \\
&= |2 + 3i| \\
&= \sqrt{2^2 + 3^2} \\
AC &= \sqrt{13}
\end{aligned}$$

2 pts **3** Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$\begin{aligned} ABCD \text{ est un parallélogramme} \quad &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\Longleftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \\ &\Longleftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \\ &\Longleftrightarrow z_D = z_C - z_B = z_A \\ &\Longleftrightarrow z_D = 3 + 2i - (-2 + i) + 1 - i \\ &\Longleftrightarrow z_D = 3 + 2i + 2 - i + 1 - i \end{aligned}$$

L'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme est $z_D = 6$.

1.5 pt **4** Déterminer l'affixe du point I milieu de $[AB]$. Placer le point I sur la figure précédente.

$$\begin{aligned} z_I \quad &= \frac{1}{2}(z_A + z_B) \\ &= \frac{1}{2}(1 - i - 2 + i) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

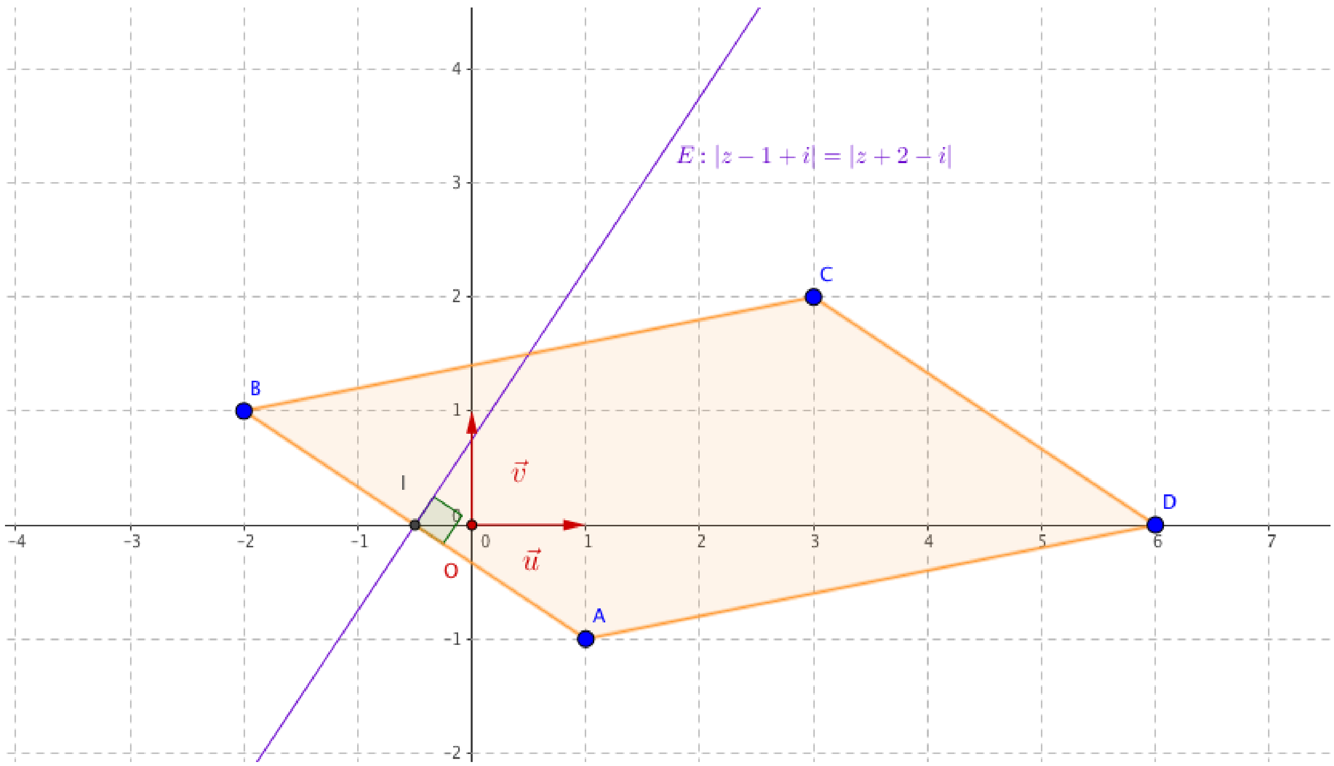
Le point I milieu de $[AB]$a pour affixe $z_I = -\frac{1}{2}$, donc $I\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

1.5 pt **5** Tracer, en le justifiant, sur le graphique précédent l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z-1+i| = |z+2-i|$.

$$\begin{array}{ll|ll} |z-1+i| & = |z-(1-i)| & |z+2-i| & = |z-(-2+i)| \\ & = |z_M - z_A| & & = |z_M - z_B| \\ & = AM & & = BM \end{array}$$

$$\begin{aligned} M \in E \quad &\Longleftrightarrow |z-1+i| = |z+2-i| \\ &\Longleftrightarrow MA = MB \\ &\Longleftrightarrow M \text{ est équidistant de } A \text{ et } B \end{aligned}$$

L'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z-1+i| = |z+2-i|$ est donc la médiatrice de $[AB]$.



Exercice 5 — *6 points*

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2 pts **1** Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$.

Module

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{a^2+b^2}\\ &= \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\\ &= \sqrt{4}\\ &= 2\end{aligned}$$

Argument

$$\begin{cases}\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient

$$\boxed{z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

1 pt **2** Ecrire z_2 sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

$$\boxed{z_2 = 1 = i}$$

1 pt **3** Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z_1 \times z_2$

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

1 pt **4** Ecrire $z_1 \times z_2$ sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (1 - i\sqrt{3})(1+i) \\ &= 1 + i - i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3} \\ &= 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\boxed{z_1 \times z_2 = (1 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})}$$

1 pt **5** En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
On utilise les deux formes algébrique et trigonométrique de $z_1 \times z_2$:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$