Nom : .... *Prénom :*	**DS 02** CASE DES MATHS	TSTI2D1 *Oct. 2019* *Devoir n° 6* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Lectures graphiques — *4,5 points*

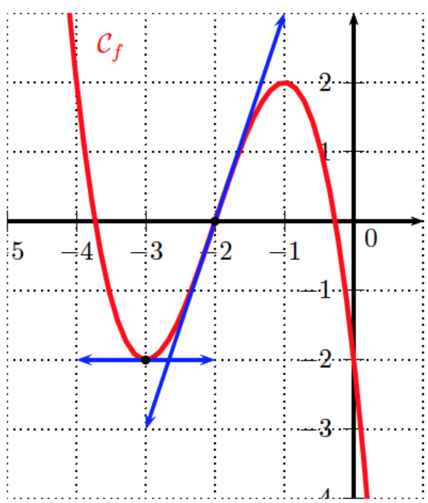
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ de courbe représentative C_f ci-contre. Répondre aux questions suivantes sur votre copie :

1 pt **1** Lire $f(-3) = -2$ et $f(-2) = 0$.

2 pts **2** Lire $f'(-3) = 0$ et $f'(-2) = 0$.

1.5 pt **3** Donner le tableau de variation de f
Voici le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	↘		-2	↗	2	↘	



Exercice 2 :Calculs de dérivées — *8 points*

Calculer la dérivée des fonctions suivantes en détaillant les calculs :

2 pts **1** $f(x) = 3x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + \pi$.
f est une somme du type $u + v$, de dérivée $u' + v'$:

$$\boxed{f'(x) = 12x^3 - x + 6}$$

2 pts **2** $f(x) = (-2x+3)(x+7)$. f est un produit du type $u \times v$, de dérivée $u'v + uv'$:
$\begin{cases} u(x) & = -2x+3 \\ v(x) & = x+7 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) & = -2 \\ v'(x) & = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x+7) + 1(-2x+3) \\ &= -2x - 14 - 2x + 3 \\ &= -4x - 11 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = -4x - 11}$$

2 pts **3** $f(x) = \dfrac{5x-1}{-2x+3}$
f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où

$f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans : $\begin{cases} u(x) & = 5x-1 \\ v(x) & = -2x+3 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) & = 5 \\ v'(x) & = -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(-2x+3) - (-2)(5x-1)}{(-2x+3)^2} \\ &= \frac{-10x + 15 + 10x - 2}{(-2x+3)^2} \\ &= \frac{13}{(-2x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{13}{(-2x+3)^2}}$$

2 pts **4** $f(x) = (5x+2)^4$
$f = u^4$ donc $f' = 4u^3u'$.
Ici $u(x) = 5x+2$, donc $u'(x) = 5$, puis $f'(x) = 4(5x+2)^3 \times 5$

$$\boxed{f'(x) = 20(5x+2)^3}$$

Exercice 3 :Étude de fonction — *9 points*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
On note C_f, la courbe représentative de f dans un repère othonormé.

1 Variations de f :

1 pt **a.** Déterminer la dérivée de f.
$f'(x) = 2x - 4$

2 pts **b.** En déduire le tableau de variations de f.
On étudie le signe de la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2x = 4 \\ &\iff x = 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2x > 4 \\ &\iff x > 2 \end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	↘		-3		↗

2 Tangente au point A d'abscisse 1.

1 pt **a.** Calculer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A d'abscisse 1.

Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A d'abscisse 1 est le nombre dérivée en 1, c'est-à-dire : $f'(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$

2 pts **b.** En déduire l'équation de la tangente T_A au point A.

T_A a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

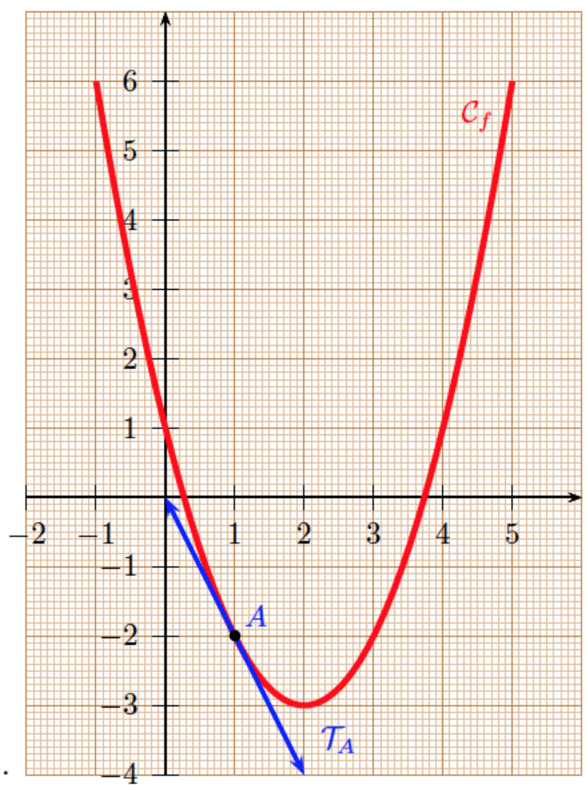
- ✏ $f'(1) = -2$
- ✏ $f(1) = -2$

$$\boxed{T_A \text{ a pour équation } y = -2(x-1) - 2, \text{ soit } y = -2x}$$

3 Graphique.

2 pts **a.** Tracer C_f sur l'intervalle $[-1;5]$.

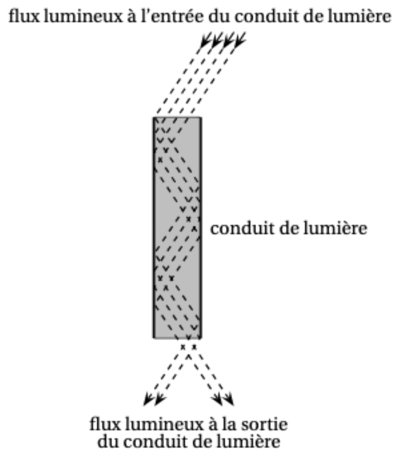
1 pt **b.** Tracer la tangente T_A.



Exercice 4 : Suite — 9,5 points

Pour permettre un apport de lumière naturelle dans une habitation et réaliser des économies d'électricité, une solution réside dans l'installation d'un conduit de lumière au niveau de la toiture. Il s'agit d'un tube cylindrique en

aluminium recouvert d'un film multicouche à base de polymère.
Dans ce conduit, le flux lumineux, exprimé en lumens (lm), diminue de $0,5\,\%$ tous les décimètres.
On rappelle qu'un décimètre vaut dix centimètres.



On suppose que le flux lumineux à l'entrée d'un tel conduit de lumière est de 4 000 lumens.
On pose $u_0 = 4000$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note (u_n) le flux lumineux, en lumens, à la sortie d'un conduit de longueur n décimètres.

1 pt **1** Justifier que $u_1 = 3\,980$.
Baisser de $0,5\,\%$ revient à multiplier par $1 - 0,5\,\% = 1 - 0,005 = 0,995$.

$$4000 \times 0,995 = 3980$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } u_1 = 3\,980}$$

1.5 pt **2** Calculer le flux lumineux, en lumens, à la sortie d'un conduit d'une longueur de 20 cm.
Le flux lumineux , en lumens, à la sortie d'un conduit d'une longueur de 20 cm est donné par u_2 ; en effet 20 cm.= 2 dm.

$$\begin{aligned} u - 2 &= 0,995u_1 \\ &= 0,995 \times 3980 \\ &= 3960,1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le flux lumineux , en lumens, à la sortie d'un conduit d'une longueur de 20 cm est de 3960,1.}}$$

2 pts **3** Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
On passe de u_n à u_{n+1} en baissant de $0,5\,\%$; ce qui revient à multiplier par 0,995.
Ainsi pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} = 0,995u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison 0,995 de premier terme } u_0 = 4000.}$$

4 Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
Comme la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,995 de premier terme $u_0 = 4000$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= q^n \times u_0 \\ &= 0,995^n \times 4000 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = 4000 \times 0,995^n}$$

2 pts **5** Un conduit de lumière de 2 mètres de long permettrait-il d'obtenir un flux lumineux d'au moins 3 600 lumens en sortie ?
2 mètres = 200cm =20 dm.
On calcule donc u_{20}.

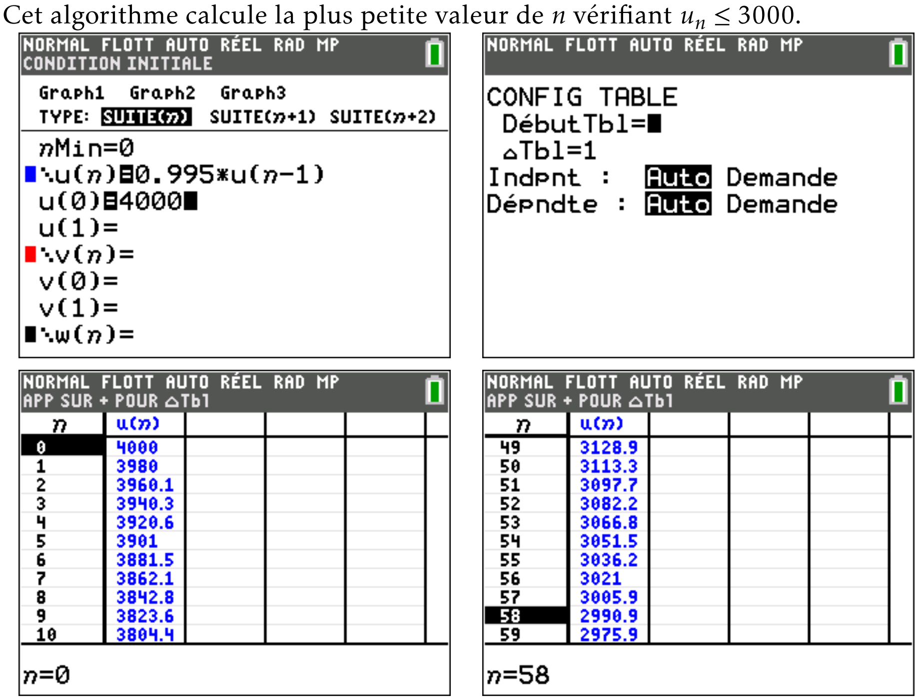
$$\begin{aligned} u_{20} &= q^{20} \times u_0 \\ &= 0,995^{20} \times 4000 \\ &\approx 3618,4 \end{aligned}$$

> Un conduit de lumière de 2 mètres de long permettrait-il d'obtenir un flux lumineux d'environ 3618 lumens en sortie. On peut donc obtenir un flux lumineux d'au moins 3 600 lumens en sortie.

6 On considère l'algorithme ci-dessous où n désigne un entier naturel et U un nombre réel.

```
n ← 0
U ← 4000
Tant que U > 3000
    n ← n + 1
    U ← U × 0,995
Fin Tant que
```

2 pts **a.** Indiquer le contenu de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme.
Cet algorithme calcule la plus petite valeur de n vérifiant $u_n \leq 3000$.



> A la fin de l'éxécution de cet algorithme ; on aura $n = 58$.

1 pt **b.** Interpréter la réponse obtenue à la question précédente dans le contexte du conduit de lumière.
58 dm = 5,8 m

> A la sortie d'un conduit de lumière de 5,80 m de long, le flux lumineux sera inférieur à 3000 lumens.