

# BACCALAURÉAT BLANC 2020 DE MATHÉMATIQUES – SÉRIE STI2D –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

Les calculatrices sont **AUTORISÉES**

Coefficient : 4

---

*Sont autorisées les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « **mode examen** » ou les calculatrices de type collègue.*

***Le mode examen ne devra être activé par le candidat qu'une fois entré en salle et sur instruction du surveillant de salle.***

*Le candidat doit traiter les quatre exercices .*

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :*

- ▶ *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ▶  *votre spécialité : ITEC , AC ou EE.*
- ▶  *votre classe : Terminale STI2D1 ou Terminale STI2D2 ou Terminale STI2D3 ou Terminale STI2D4.*

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages.**

## Exercice 1

( 5 points )

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

- 1** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
On note  $z_A$  l'affixe d'un point  $A$  appartenant au cercle de centre  $O$  et de rayon 4. La partie réelle de  $z_A$  est positive et sa partie imaginaire est égale à 2.  
Le nombre complexe  $z_A$  a pour forme exponentielle :
- a.  $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
  - b.  $-4e^{i\frac{\pi}{6}}$
  - c.  $4e^{i\frac{\pi}{6}}$
  - d.  $-4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
- 2** L'ensemble des solutions de l'équation  $\ln(x-1) + \ln(x+1) = 0$  est :
- a.  $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$
  - b.  $S = \{-1; 1\}$
  - c.  $S = \{\sqrt{2}\}$
  - d.  $S = \{1\}$
- 3** Pour tout réel  $a$  strictement positif,  $\frac{\ln(2a) + \ln(8a)}{2}$  est égal à :
- a.  $\ln(4a)$
  - b.  $\ln(5a)$
  - c.  $\ln(16a)$
  - d.  $\ln(8a^2)$
- 4** On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x)$ .  
La primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  telle que  $F(1) = 3$  est donnée par :
- a.  $F(x) = x \ln(x) - 2x + 5$
  - b.  $F(x) = \frac{3}{x}$
  - c.  $F(x) = x \ln(x) + 3$
  - d.  $F(x) = x \ln(x) - x + 4$
- 5** On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ . On appelle  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
On admet que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .  
La courbe  $\mathcal{C}$  admet :
- a. deux asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées
  - b. une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées et une asymptote parallèle à l'axe des abscisses
  - c. une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées et aucune asymptote parallèle à l'axe des abscisses
  - d. deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses

## Exercice 2

( 5 points )

Température extérieure  $T$

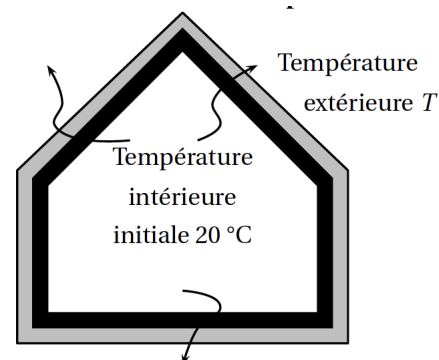
En plein hiver, en Europe, une maison est chauffée à  $20\text{ }^\circ\text{C}$ .

La température extérieure est notée  $T$ .

Dans tout l'exercice, on suppose que  $T < 20$ .

Température intérieure initiale  $20\text{ }^\circ\text{C}$

Lorsque le chauffage est coupé, la température intérieure diminue par perte de chaleur.



On modélise cette situation par une suite  $(u_n)$  dont le terme général  $u_n$  désigne la température intérieure de la maison  $n$  heures après la coupure du chauffage.

Pour une maison en maçonnerie traditionnelle et une température extérieure  $T$  constante, on admet que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,99u_n + \frac{T}{100} \quad \text{et} \quad u_0 = 20.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

### Partie A

On suppose que la température extérieure  $T$  est égale à  $0\text{ }^\circ\text{C}$ . On a donc  $T = 0$ .

- 1 Calculer les termes  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2 Montrer que, dans ce cas, la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 3 Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 4 Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ . Justifier.
- 5
  - a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $u_n < 5$ .
  - b. En déduire le nombre de jours à partir duquel la température intérieure est descendue en dessous de  $5\text{ }^\circ\text{C}$ .

### Partie B

On suppose que la température extérieure  $T$  est égale à  $-15\text{ }^\circ\text{C}$ . On a donc  $T = -15$ .

- 1 Montrer que, dans ce cas, la suite  $(u_n)$  est définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_{n+1} = 0,99u_n - 0,15 \quad \text{et} \quad u_0 = 20.$$

- 2
  - a. Calculer les termes  $u_1$  et  $u_2$ .
  - b. Dans ce cas, la suite  $(u_n)$  est-elle géométrique? Justifier la réponse.
- 3

On souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, le nombre d'heures à partir duquel la température intérieure devient strictement inférieure à  $5\text{ }^\circ\text{C}$ . On utilise pour cela l'algorithme incomplet ci-contre dans lequel  $U$  désigne un nombre réel et  $N$  un nombre entier naturel.

```
U ← 20
N ← 0
Tant que ...
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

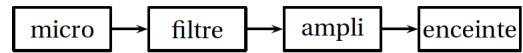
- a. Recopier et compléter l'algorithme.
- b. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'heures recherché.

### Exercice 3

( 5 points )

Les résistances et les condensateurs sont des composants électroniques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres.

Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence  $f$ , exprimée en Hertz (Hz).



Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide de deux nombres complexes  $z_R$  et  $z_C$ .

Dans tout l'exercice, on suppose que  $z_R = 10$  et  $z_C = -\frac{1\,000\sqrt{3}}{f}i$ , où  $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

#### Partie A : Effet du filtre sur un son grave

On choisit un son grave de fréquence  $f = 100$ .

- 1 Montrer que  $z_C = -10\sqrt{3}i$ .
- 2
  - a. Déterminer la forme exponentielle de  $z_C$ .
  - b. On considère le nombre complexe  $Z = z_R + z_C$ . On a donc  $Z = 10 - 10\sqrt{3}i$ . Déterminer la forme exponentielle de  $Z$ .
  - c. On considère le nombre complexe  $z_G$  défini par :  $z_G = \frac{z_C}{z_R + z_C}$ .

Montrer que  $z_G = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ .

- d. Le module du nombre complexe  $z_G$  est appelé gain du filtre. Donner la valeur exacte du gain du filtre puis une valeur approchée au centième.

#### Partie B : Effet du filtre sur un son aigu

On choisit un son aigu de fréquence  $f = 1\,000\sqrt{3}$ .

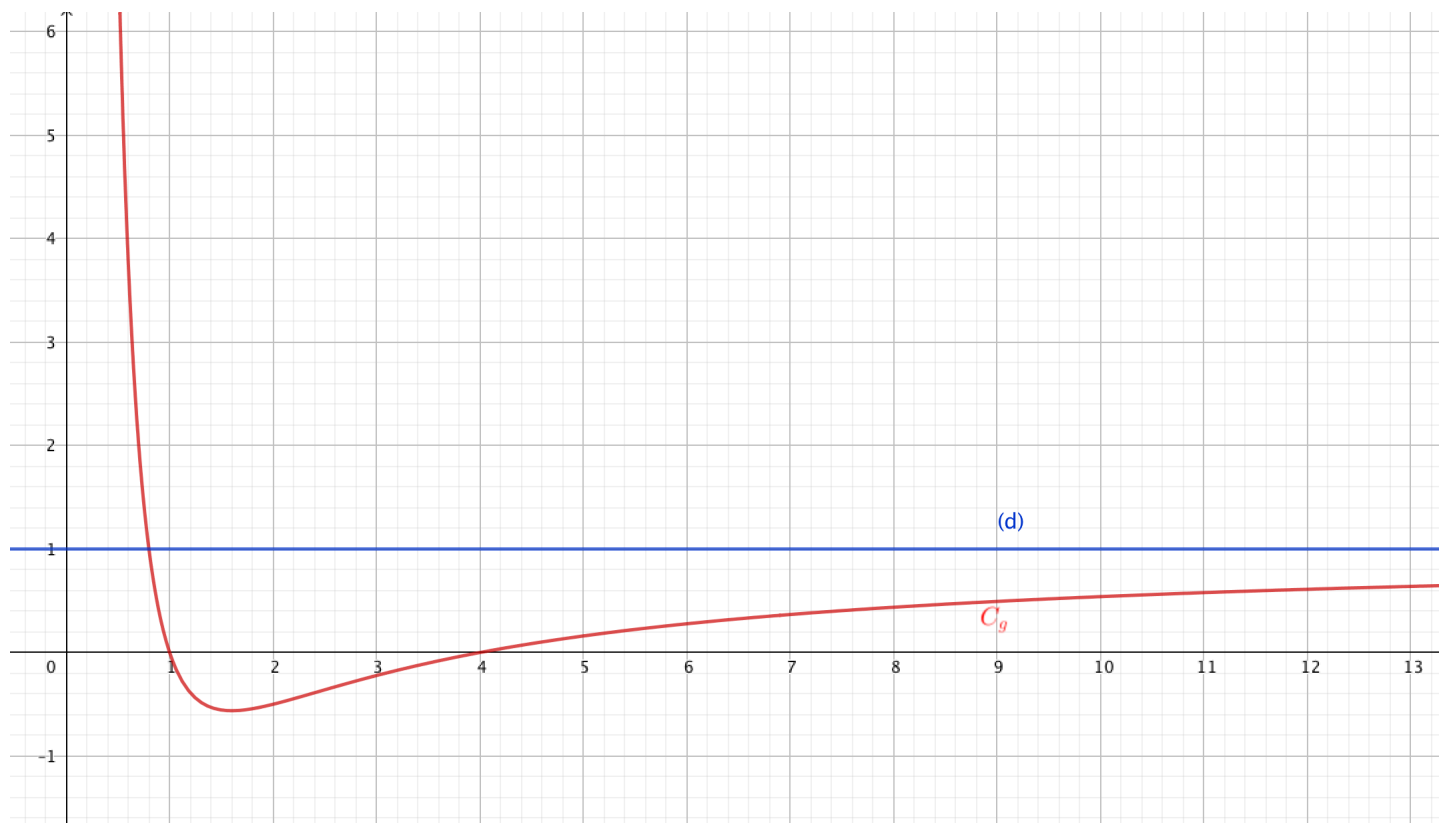
- 1 Montrer que le nombre complexe  $z_G$  défini par  $z_G = \frac{z_C}{z_R + z_C}$  est égal à  $\frac{-i}{10-i}$ .
- 2 Déterminer la forme algébrique de  $z_G$ .
- 3 Calculer la valeur exacte du gain du filtre  $|z_G|$  et en donner une valeur approchée au centième.

**Exercice 4**

( 5 points )

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$ , dont la courbe représentative  $\mathcal{C}$  est tracée dans le repère ci-après.

On précise que la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite  $(d)$ , qui est parallèle à l'axe des abscisses, comme asymptotes.

**PARTIE A**

- 1** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
- 2** Donner dans un tableau le signe de  $g(x)$  quand  $x$  varie dans  $]0; +\infty[$ .
- 3** On admet que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$   $g(x) = \frac{x^2 + bx + c}{x^2}$ , où  $b$  et  $c$  sont des constantes réelles.
  - a.** Lire  $g(1)$  et  $g(4)$  sur la figure.
  - b.** En déduire un système de deux équations permettant d'obtenir  $b$  et  $c$ .
  - c.** Résoudre le système obtenu à la question b. et en déduire une expression de  $g(x)$ .

**PARTIE B**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$ .

- 1** Calculer les limites de aux bornes de  $]0; +\infty[$ .
- 2** Prouver que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{5x - 8}{x^3}$ .
- 3** Etudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4** Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 2.