Nom :	**Correction DS 02** CASE DES MATHS	TSTI2D *Nov. 2018*
Prénom :		*Devoir n° 7* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — 7 points

1 On considère z et z' d'affixes respectives $z = 4-3i$ et $z' = -2+i$.
Calculer les nombres complexes suivants :

0.5 pt **a.** $z+z' = 4-3i-2+i = 2-2i$

0.5 pt **b.**

$$\begin{aligned} 2z-3z' &= 2(4-3i)-3(-2+i) \\ &= 8-6i+6-3i \\ &= 14-9i \end{aligned}$$

1 pt **c.**

$$\begin{aligned} z^2 &= (4-3i)^2 \\ &= 16-2\times 4\times 3i+(3i)^2 \\ &= 16-24i+9i^2 \\ &= 16-9-24i \\ &= 7-24i \end{aligned}$$

1 pt **d.**

$$\begin{aligned} 4zz' &= 4(4-3i)(-2+i) \\ &= 4(-8+4i+6i-3i^2) \\ &= 4(-8+3+10i) \\ &= -20+40i \end{aligned}$$

1 pt **e.** $\dfrac{z}{z'}$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{4-3i}{-2+i} \\ &= \frac{(4-3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} \\ &= \frac{-8-4i+6i-3}{2^2+1^2} \\ &= \frac{-8-4i+6i-3}{2^2+1^2} \\ &= \frac{-11+2i}{5} \end{aligned}$$

1 pt **f.**

$$\begin{aligned}\frac{1-z}{2+z'} &= \frac{1-(4-3i)}{2-2+i}\\ &= \frac{1-4+3i}{i}\\ &= \frac{(-3+3i)(-i)}{i\times(-i)}\\ &= \frac{(-3+3i)(-i)}{i\times(-i)}\\ &= \frac{-3i^2+3i}{0^2+1^2}\\ &= 3+3i\end{aligned}$$

2 pts **2** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $8z+2i=iz-3$.

$$\begin{aligned}8z+2i=iz-3 &\iff 8z-iz=-3-2i\\ &\iff (8-i)z=-3-2i\\ &\iff z=\frac{-3-2i}{8-i}\\ &\iff z=\frac{(-3-2i)(8+i)}{(8-i)(8+i)}\\ &\iff z=\frac{-24-3i-16i+2}{8^2+1^2}\\ &\iff z=\frac{-22-19i}{65}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{-22-19i}{65}\right\}}$$

Exercice 2 — 3,5 points

On se place dans un repère orthonormé. On donne $\vec{u}(2;-1)$ et $\vec{v}(1;3)$

1 pt **1** Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= xx'+yy'\\ &= 2\times1+(-1)\times3\\ &= 2-3=-1\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=-1}$$

1 pt **2** Déterminer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

- $$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{x^2+y^2}\\ &= \sqrt{2^2+(-1)^2}\\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\|\vec{v}\| &= \sqrt{x^2+y^2}\\ &= \sqrt{1^2+3^2}\\ &= \sqrt{10}\end{aligned}$$

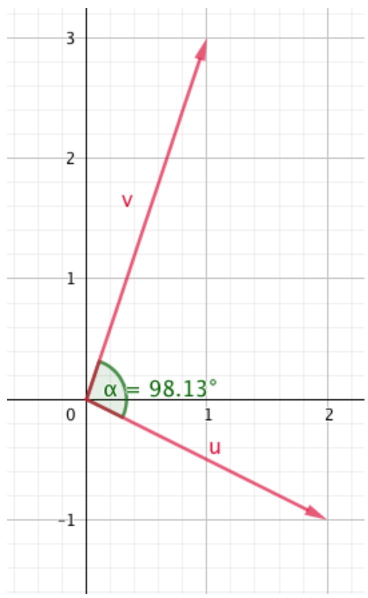
$$\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{5} \text{ et } \|\vec{v}\|=\sqrt{10}}$$

1.5 pt **3** En déduire alors $\cos(\vec{u},\vec{v})$ puis une valeur de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Comme $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$, on déduit :

$$\begin{aligned}\cos(\vec{u},\vec{v}) &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}\\ &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\end{aligned}$$

En utilisant la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient : $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \approx 98°$



Exercice 3 — 6,5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unités 1 cm.
Soit $z = 2-\mathrm{i}$, $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

1.5 pt **1** Donner les écritures algébriques de $-z$, de $\overline{z}$ et de $\frac{1}{2}\overline{z}$.

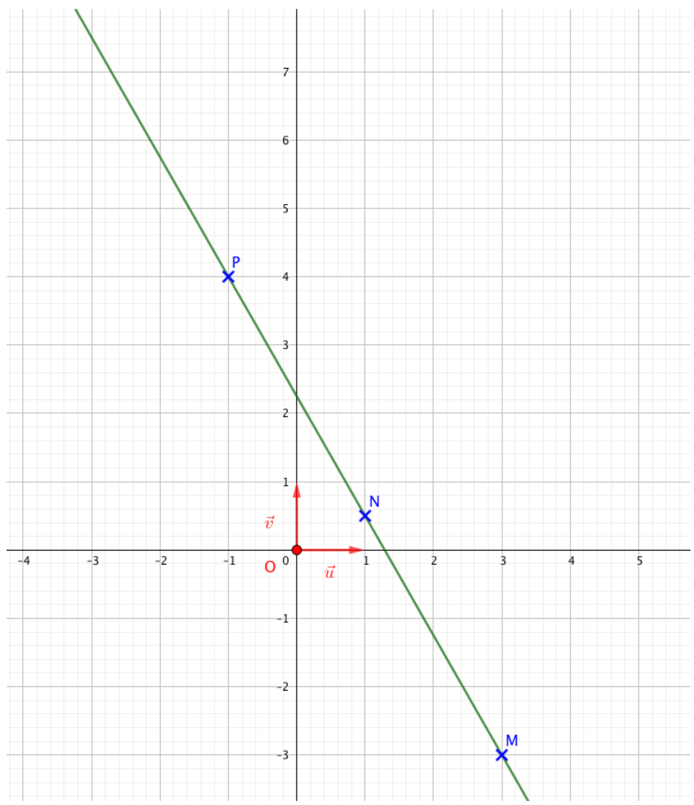
- $-z = -(2-\mathrm{i}) = -2+\mathrm{i}$
- $\overline{z} = 2+\mathrm{i}$
- $\frac{1}{2}\overline{z} = \frac{1}{2}(2+\mathrm{i}) = 1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2 On considère le nombre complexe $p = \dfrac{2+\overline{z}}{2-\overline{z}}$.

2 pts **a.** Montrer que $p = -1+4\mathrm{i}$.

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{2+\overline{z}}{2-\overline{z}} \\
&= \frac{2+2+\mathrm{i}}{2-2-\mathrm{i}} \\
&= \frac{4+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} \\
&= \frac{(4+\mathrm{i})(\mathrm{i})}{-\mathrm{i}\times\mathrm{i}} \\
&= \frac{(4\mathrm{i}-1}{0^2+1^2} \\
&= -1+4\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

3 pts **b.** Les points M, N et P sont les points d'affixes respectives $3-3\mathrm{i}$, $\frac{1}{2}\overline{z}$ et p. Placer ces trois points dans le repère. Justifier l'alignement de ces trois points.



- Méthode 1 : Les trois points M, N et P sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

♡

$$
\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{MN}} &= z_N - z_M \\
&= 1+\frac{1}{2}\mathrm{i}-3+3\mathrm{i} \\
&= -2+\frac{7}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

♡

$$
\begin{aligned}
z_{\overrightarrow{MP}} &= z_P - z_M \\
&= -1+4\mathrm{i}-3+3\mathrm{i} \\
&= -4+7\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

On remarque que $z_{\overrightarrow{MP}} = -4+7\mathrm{i} = 2\left(-2+\frac{7}{2}\mathrm{i}\right) = 2z_{\overrightarrow{MN}}$.
Ainsi $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$, les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires. Ce qui prouve l'alignement des trois points M, N et P.

- Méthode 2 : On montre que N est le milieu de $[MP]$:
Le milieu de $[MP]$ a pour affixe $z_I = \frac{1}{2}(z_M + z_P)$.

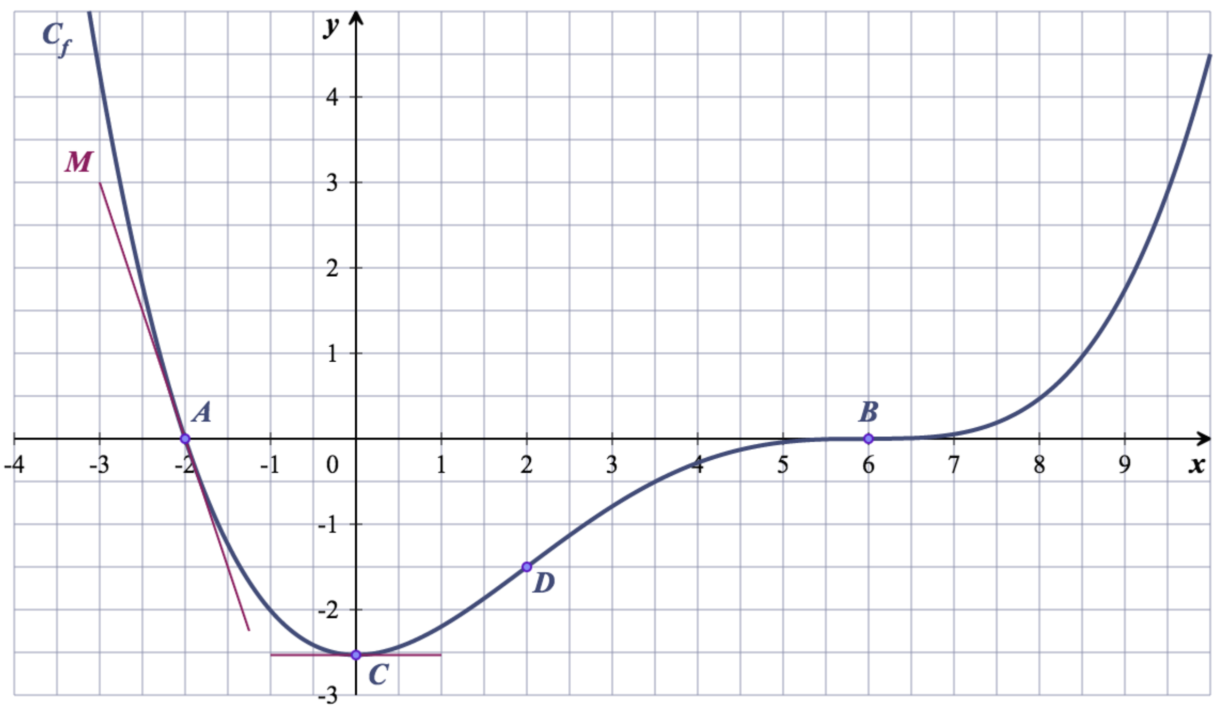
Or :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(z_M + z_P) &= \frac{1}{2}(3 - 3\mathrm{i} - 1 + 4\mathrm{i})\\ &= \frac{1}{2}(2 + \mathrm{i})\\ &= 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}\\ &= z_N\end{aligned}$$

Ainsi N est le milieu de $[MP]$.

Exercice 4 — *7 points*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f.
La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point $A(-2;0)$ et lui est tangente au point B d'abscisse 6.
La tangente à la courbe au point A passe par le point $M(-3;3)$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une deuxième tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 0.



À partir du graphique et des données de l'énoncé, répondre aux questions suivantes.

1 pt **1** Dresser sans justification le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Les réponses aux questions suivantes devront être justifiées.

1 pt **2** **a.** Déterminer $f'(0)$.

$f'(0) = 0$ car la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point C est horizontale.

1 pt **b.** Déterminer les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont données par les abscisses des points pour lesquels la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est horizontale.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0;6\}.}$$

2 pts **3** Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A. En déduire la valeur de $f'(-2)$.

Par lecture graphique, on lit le coefficient directeur $m = -3$. En effet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ dirige la tangente (AM).

(AM) a une éqation réduite du type $y = mx + p$ où $m = -3$. Soit $y = -3x + p$.

$$\begin{aligned} A(-2;0) \in (AM) &\iff y_A = -3x_A + p \\ &\iff 0 = -3 \times (-2) + p \\ &\iff 0 = 6 + p \\ &\iff p = -6 \end{aligned}$$

$$\boxed{(AM) : y = -3x - 6.}$$

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente (AM), donc :

$$\boxed{f'(-2) = -3}$$

2 pts **4** On donne $f'(2) = \dfrac{3}{4}$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D avec l'axe des abscisses.

La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

- ✏ $f'(2) = \dfrac{3}{4}$
- ✏ $f(2) = -\dfrac{3}{2}$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = \frac{3}{4}(x-2) - \frac{3}{2}, \text{ soit } y = \frac{3}{4}x - 3}$$

On détermine l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses :

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in T \cap (Ox) &\iff \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 3 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 = \frac{3}{4}x - 3 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{3}{4}x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La tangente à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ au point } D \text{ rencontre l'axe des abscisses au point } E(4;0).}$$