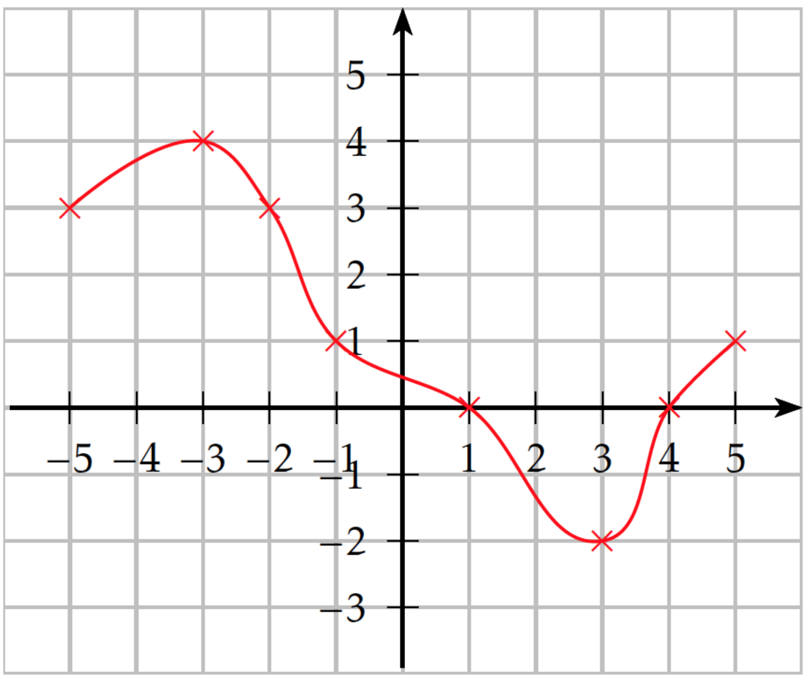
Nom : .... *Prénom :*	**DS 01 Correction** CASE DES MATHS	TSTI2D *Sept. 2018* *Devoir n° 3* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Lectures graphiques — *5,5 points*

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f.



1 pt **1** Quel est son ensemble de définition ?
L'ensemble de définition est l'ensemble des réels qui ont une image.

$$\boxed{D_f = [-5;5]}$$

1.5 pt **2** Résoudre graphiquement les équations :

a. $f(x) = 4$ Les solutions de l'équation $f(x) = 4$ sont les abscisses des points de la courbe C_f d'oronnée 4, il y en a un seul c'est -3.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3\}}$$

b. $f(x) = 0$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1;4\}}$$

c. $f(x) = -3$

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

1.5 pt **3** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
Les solutions de l'équation $f(x) \geqslant 0$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés en dessous de l'axe des abscisses.

$$\boxed{\mathcal{S} = [-5;1] \cup [4;5]}$$

1.5 pt **4** Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$. Attention c'est une inéquation sur la fonction dérivée !
Les solutions de l'équation $f'(x) \geqslant 0$ sont données par les réels x appartenant aux intervalles où f est croissante.

$$\boxed{\mathcal{S} = [-5;-3] \cup [3;5]}$$

Exercice 2 : Des calculs ... — *3,5 points*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

0.5 pt **1** $-3x+5=0$ $-5x+2=0 \Leftrightarrow -5x=-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$

$$S=\left\{\frac{2}{5}\right\}$$

1 pt **2** $-3x+5 \leq 0$

$-5x+2 \leq 0 \Leftrightarrow -5x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{5}$

$$S=\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$$

1 pt **3** $3x^2+7x+4=0$
On calcule $\Delta=b^2-4ac=49-4\times3\times4=1$, comme $\Delta>0$ l'équation a deux solutions distinctes.
$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7+1}{6}=-1$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7-1}{6}=-\dfrac{4}{3}$

$$S=\left\{-1;-\frac{4}{3}\right\}$$

1 pt **4** $3x^2+7x+4<0$
Le trinôme ayant deux racines ;il a le signe de $a=3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		-1		$+\infty$
$3x^2+7x+4$		+	0	-	0	+	

$$S=\left]-\frac{4}{3};-1\right[$$

Exercice 3 — *3 points*

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1 pt **1** $f(x)=3x^4-x^3+5x^2+3x-2$.

$$\boxed{f'(x)=12x^3-3x^2+10x+3.}$$

1 pt **2** $f(x) = \dfrac{2}{3x+1}$.

Comme $f = \dfrac{2}{u} = 2 \times \dfrac{1}{u}$, on a $f' = 2 \times \left(-\dfrac{u'}{u^2}\right) = -\dfrac{2u'}{u^2}$

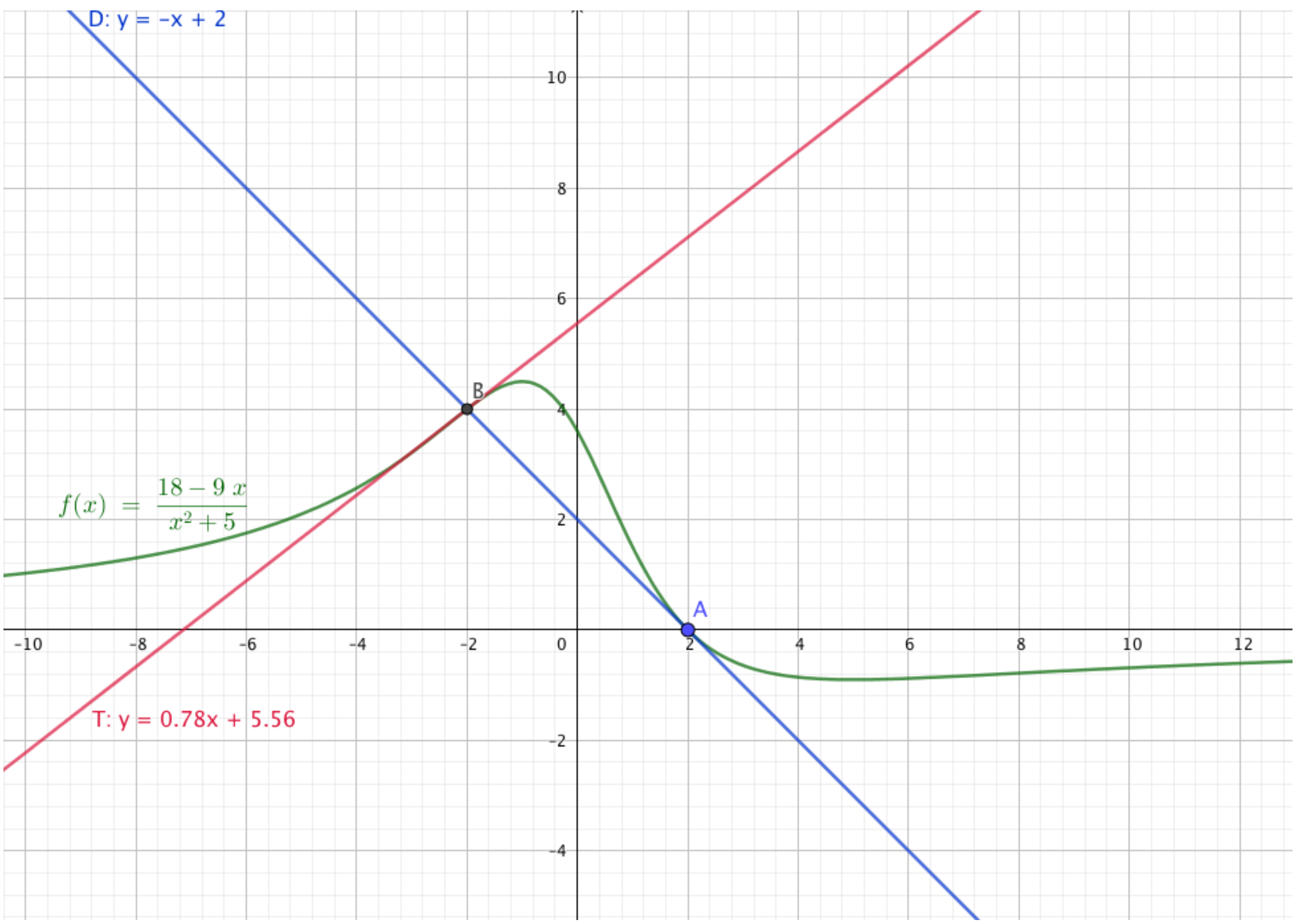
$$\boxed{f'(x) = -\frac{6}{(3x+1)^2}}$$

1 pt **3** $f(x) = \cos x + 2\sqrt{x}$.

$$\boxed{f'(x) = -\sin x + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\sin x + \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Exercice 4 — 8 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' la dérivée de la fonction f.



PARTIE A

1 La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2 - x$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2

1 pt **2** Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique précédent.
Pour tracer une droite, on peut, par exemple construire 2 points :

- ☐ Si $x = 0$ alors $y = 2$.

☐ Si $x = -2$ alors $y = 4$.

La droite $\mathcal{D}$ est donc la droite (AB) où $A(2;0)$ et $B(-2;4)$.

1.5 pt **3** Déterminer les valeurs de $f(2)$ et de $f'(2)$.

☐ $f(2) = 0$ car $A(2;0)$ est un point de $\mathcal{C}_f$.

☐ $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2; c'est donc le cefficient directeur de $\mathcal{D}$, ainsi $f'(2) = -1$.

$$\boxed{f(2) = 0 \text{ et } f'(2) = -1.}$$

PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{18-9x}{x^2+5}$.

1 Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{9\left(x^2-4x-5\right)}{(x^2+5)^2}$.

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 18-9x \\ v(x) &= x^2+5 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= -9 \\ v'(x) &= 2x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-9(x^2+5) - 2x(18-9x)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{-9x^2 - 45 - 36x + 18x^2}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{9x^2 - 36x - 45}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{9\left(x^2-4x-5\right)}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

1.5 pt **2** **a.** Étudier le signe de $x^2 - 4x - 5$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+6}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-6}{2} = -1$$

$x^2 - 4x - 5$ est un trinôme du second degré qui a pour racines -1 et 4; il a donc le signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
signe de $x^2 - 4x - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1 pt **b.** Étudier le signe de $f'(x)$.

On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
signe de $(x^2-4x-51)$		$+$	0	-	0	$+$	
signe de 9		$+$		$+$		$+$	
signe de $\left(x^2+5\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	0	$+$	

1.5 pt **c.** Donner le tableau de variations de la fonction f.

On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\frac{6}{7}$	$\nearrow$	

1.5 pt **3** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse (-2).

T a pour équation $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

✏ $f'(-2)=\dfrac{9(4+8-5)}{(4+5)^2}=\dfrac{63}{81}=\dfrac{7}{9}$

✏ $f(-2)=4$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y=\frac{7}{9}(x+2)+4, \text{ soit } y=\frac{7}{9}x+\frac{50}{9}}$$