Nom :	DM 01 Correction	TSTI2D2 — Sept. 2018
Prénom :		Devoir n° 2 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Présentation : 2 points

Exercice 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1 f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}-2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{x^2} \qquad\qquad 2x^2=2\sqrt{x}\times x\sqrt{x}\\ &= \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\times x\sqrt{x}}+\frac{4}{2x^2}\\ &= \frac{x\sqrt{x}}{2x^2}+\frac{4}{2x^2}\\ &= \frac{x\sqrt{x}+4}{2x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x\sqrt{x}+4}{2x^2}}$$

2 g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x-2}$

g est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $g=\dfrac{u}{v}$ d'où $g'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= \sin x\\ v(x) &= \cos x-2\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= \cos x\\ v'(x) &= -\sin x\end{cases}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos x\times(\cos x-2)-(-\sin x)\cos x}{(\cos x-2)^2}\\ &= \frac{\cos x^2-2\cos x+\sin x^2}{(\cos x-2)^2}\\ &= \frac{\cos x^2+\sin x^2-2\cos x}{(\cos x-2)^2}\\ &= \frac{1-2\cos x}{(\cos x-2)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{1-2\cos x}{(\cos x-2)^2}}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-7x-\dfrac{9}{x}+15$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative se la fonction f dans le plan.

1 On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ et, vérifier que pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{(x-3)\left(2x^2-x-3\right)}{x^2}$$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x-7-9\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x-7+\frac{9}{x^2} \\ &= \frac{(2x-7)x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2} \\ &= \frac{2x^3-7x^2+9}{x^2} \end{aligned}$$

On développe

$$\begin{aligned} (x-3)\left(2x^2-x-3\right) &= 2x^3-x^2-3x-6x^2+3x+9 \\ &= 2x^3-7x^2+9 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi on a bien } f'(x) = \frac{(x-3)\left(2x^2-x-3\right)}{x^2}}$$

2 **a.** Étudier le signe du polynôme $g(x) = 2x^2-x-3$.
$\Delta = b^2-4ac = 1-4\times2\times(-3) = 25$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{1+5}{4} & &= \frac{1-5}{4} \\ &= \frac{3}{2} & &= -1 \end{aligned}$$

$2x^2-x-3$ est un trinôme du second degré qui a pour racines -1 et $\frac{3}{2}$; il a donc le signe de $a=2$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $2x^2-x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, on l'aura ainsi sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
signe de $(x-3)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $2x^2-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

3 Donner le tableau de variations de la fonction f.
On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	0

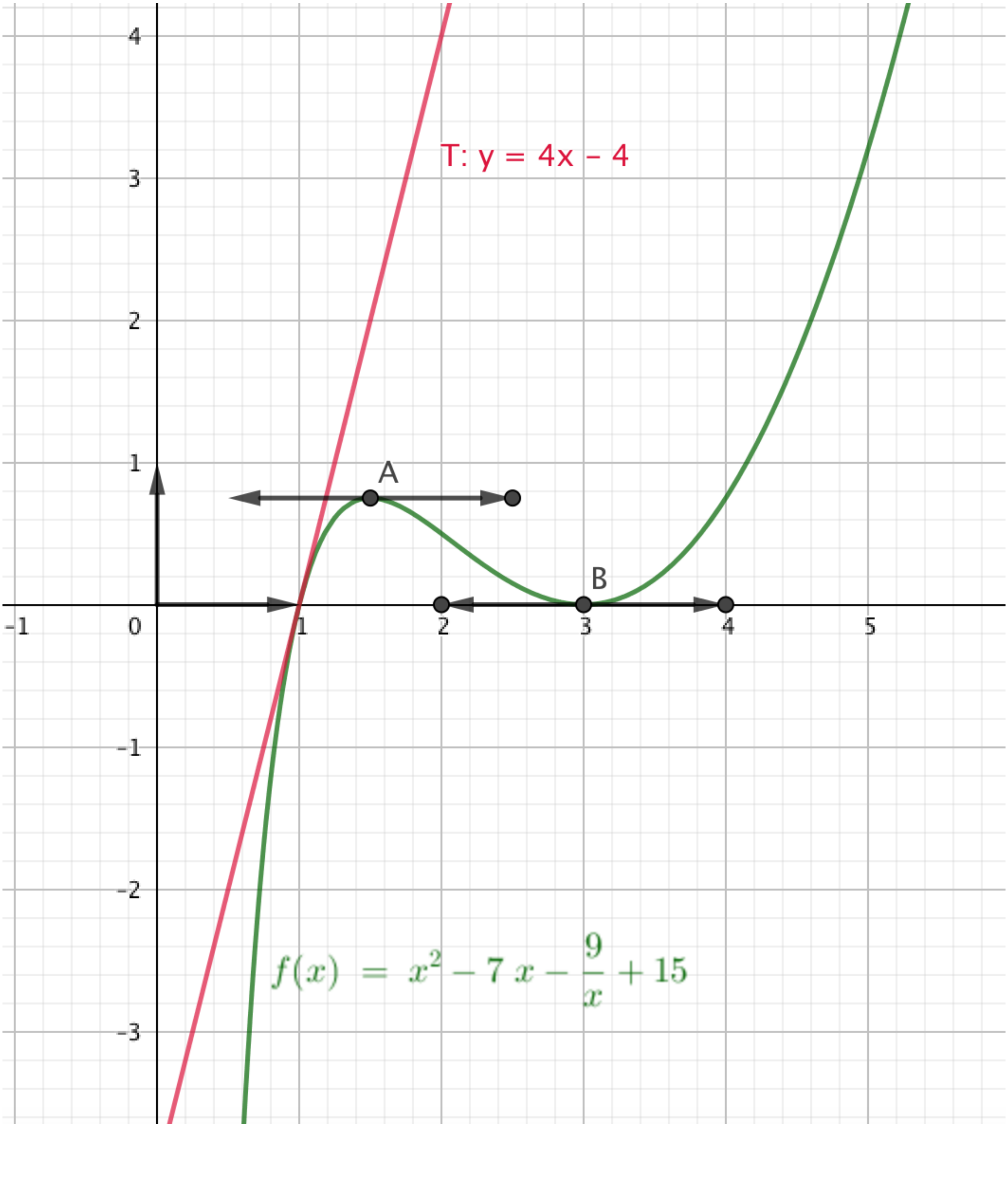
- $$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2}\right) &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\tfrac{3}{2}\right) - \frac{9}{\left(\frac{3}{2}\right)} + 15 \\ &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{21}{2} - 9 \times \tfrac{2}{3} + 15 \\ &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{21}{2} - 6 + 15 \\ &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{21}{2} + 9 \\ &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{42}{4} + \tfrac{36}{4} \\ &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{6}{4} \\ &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} f(3) \quad & 3^2 - 21 - \frac{9}{3} + 15 \\ &= 9 - 21 - 3 + 15 \\ &= 0 \end{aligned}$$

4 Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

- ✏ $f'(1) = 4$
- ✏ $f(1) = 0$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 4(x-1) + 0, \text{ soit } y = 4x - 4}$$

5 Tracer $\mathcal{C}_f$ et (T) dans un repère orthonormé d'unité le cm.


T: y = 4x – 4
A
B
$f(x) = x^2 - 7x - \frac{9}{x} + 15$
-1
0
1
2
3
4
5
-1
-2
-3