Lycée l'Oiselet **2018**

BACCALAURÉAT BLANC 2018
DE MATHÉMATIQUES
– SÉRIE STI2D –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 4

*Sont autorisées les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « **mode examen** » ou les calculatrices de type collège.*
Le mode examen ne devra être activé par le candidat qu'une fois entré en salle et sur instruction du surveillant de salle.
Le candidat doit traiter les cinq exercices .

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème sur 30 points est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : ITEC , AC ou EE.*
- *votre classe : Terminale STI2D1 ou Terminale STI2D2 ou Terminale STI2D3.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages.

Exercice 1

(5 *points*)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1 La fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x\ln(x) - x$ est croissante sur $]0;+\infty[$.

Calculons la dérivée de la fonction f : on remarque que l'on peut écrire : $f(x) = x(\ln x - 1)$.

f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) &= x \\ v(x) &= \ln x - 1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln x - 1) + \frac{1}{x} \times x \\ &= \ln x - 1 + 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Faux : La fonction f n'est donc pas strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Remarque : Un simple contre-exemple suffit !
$0,5 < 1$ or comme $f(0,5) \approx -0,847$ et $f(1)\ln 1 - 1 = -1$ on déduit $f(-0,5) > f(1)$. ce qui prouve que f n'est pas croissante sur $]0;+\infty[$.

2 La forme algébrique du nombre complexe $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ est $z = -1 + \mathrm{i}$.

$$\begin{aligned} z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -1 + \mathrm{i} \end{aligned}$$

Vrai : La forme algébrique du nombre complexe $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ est $z = -1 + \mathrm{i}$.

3 Le conjugué du nombre complexe $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ est $\overline{z} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Le conjugué du nombre complexe $z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ est $\overline{z}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$. On met alors ce nombre sous forme exponentielle.

Module	**Argument**
$\begin{aligned} \lvert\overline{z}\rvert &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\theta=\frac{\pi}{6}$ convient

$$\overline{z}=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

Vrai : Le conjugué du nombre complexe $z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ est $\overline{z}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

4 Le cube du nombre complexe $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ est égal à 8.

Le cube de $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ est :

$$\begin{aligned} z^3 &= \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 \\ &= 2^3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^3 \\ &= 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\times\frac{\pi}{3}} \\ &= 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ &= 8\left(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\right) \\ &= 8\times(-1+\mathrm{i}\times 0) \\ &= -8 \end{aligned}$$

Faux : Le cube du nombre complexe $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ est égal à -8.

5 La solution de l'équation $(2-\mathrm{i})z=4+3\mathrm{i}$ est $z=2-3\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned} (2-\mathrm{i})z=4+3\mathrm{i} &\iff z=\frac{4+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \\ &\iff z=\frac{(4+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} \\ &\iff z=\frac{8+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{2^2+1^2} \\ &\iff z=\frac{8-3+10\mathrm{i}}{5} \\ &\iff z=\frac{5+10\mathrm{i}}{5} \\ &\iff z=1+2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Faux : La solution de l'équation $(2-\mathrm{i})z=4+3\mathrm{i}$ est $z=1+2\mathrm{i}$.

Exercice 2

(5 *points*)

Un sauna est chauffé par un poêle à bois . Le poêle chauffe des pierres à sauna (kiuaskivi) dans un réceptacle situé à l'intérieur du sauna. On utilise des pierres n'éclatant pas sous les chocs thermiques et accumulant bien la chaleur. L'évolution de la température de ces pierres en fonction du temps est modélisée par la suite (U_n) définie par $U_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = 0,95 \times U_n + 5.$$

Pour tout entier naturel n, le terme U_n de la suite (U_n) est égal à la température en degrés Celsius des pierres après n minutes d'utilisation du sauna.

PARTIE A

1 **a.** Quelle est la température des pierres lorsque le sauna ne fonctionne pas ?

Comme $U_0 = 20$, la température des pierrres lorsque le sauna ne fonctionne pas est 20°C.

b. Quelle est la température des pierres après deux minutes de fonctionnement du sauna ?

$$\begin{aligned} n = 0 \text{ dans } U_{n+1} = 0,95 \times U_n + 5 \text{ donne } U_1 = 0,9 \times U_0 + 5 &= 0,95 \times 20 + 5 \\ &= 19 + 5 \\ &= 24 \\ n = 1 \text{ dans } U_{n+1} = 0,95 \times U_n + 5 \text{ donne } U_2 = 0,95 \times U_1 + 5 &= 0,95 \times 24 + 5 \\ &= 27,8 \end{aligned}$$

La température des pierres après deux minutes de fonctionnement du sauna est de 27,8 °C.

2 Pour déterminer au bout de combien de minutes la température du sauna sera supérieure à 50°C, on a commencé par élaborer l'algorithme suivant où N est un entier naturel et U est un nombre réel

```
N ⟵ 0
U ⟵ 20
Tant que U < 50

    U ⟵ 0,95 × U + 5
    N ⟵ N + 1


Fin Tant que
Afficher N
```

PARTIE B

Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = 100 - U_n$.

1 **a.** Calculer V_0, V_1 et V_2.

$V_0 = 100 - U_0$	$V_1 = 100 - U_1$	$V_2 = 100 - U_2$
$= 100 - 20$	$= 100 - 24$	$= 100 - 27,8$
$= 80$	$= 76$	$= 72,2$

$V_0 = 80 ; V_1 = 76$ et $V_2 = 72,2$.

b. Vérifier que V_0, V_1 et V_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.

Comme $\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{76}{80} = 0,95$ et $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{72,2}{76} = 0,95$:

$\boxed{\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{V_2}{V_1} = 0,95\,; V_0,\ V_1 \text{ et } V_2 \text{ semblent être les termes d'une suite géométrique de raison } 0{,}95.}$

2 On admet que pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = 0,95V_n$.

a. Exprimer V_n en fonction de n.

Ayant pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = 0,95V_n$, on déduit que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,95.

$$\begin{aligned} V_n &= q^n \times V_0 \\ &= 0,95^n \times 80 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_n = 80 \times 0,95^n}$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $U_n = 100 - 80 \times 0,9^n$.

De l'égalité $V_n = 100 - U_n$ on déduit :

$$\begin{aligned} U_n &= 100 - V_n \\ &= 100 - 80 \times 0,95^n \end{aligned}$$

$$\boxed{U_n = 100 - 80 \times 0,95^n}$$

3 Déterminer la limite de la suite (U_n). Interpréter le résultat trouvé.

Comme $0 < 0,95 < 1$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 100 - 80 \times 0,95^n = 100$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 100$, donc au bout de quelques heures de fonctionnement la température des pierres du sauna se stabilisera à 100°C.

4 **a.** Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $100 - 80 \times 0,95^n > 50$.

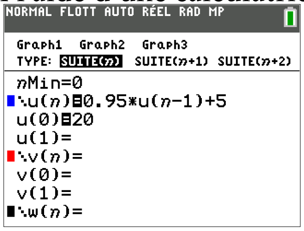
- Par le calcul :

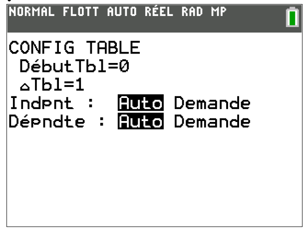
$$\begin{aligned} 100 - 80 \times 0,95^n > 50 &\iff -80 \times 0,95^n > -50 \\ &\iff 80 \times 0,95^n < 50 && \text{en multipliant par } -1 < 0 \\ &\iff 0,95^n < \frac{50}{80} && \text{car } 80 > 0 \\ &\iff \ln(0,95^n) < \ln\left(\frac{5}{8}\right) && \text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[\\ &\iff n\ln(0,95) < \ln\left(\frac{5}{8}\right) && \text{car } \ln(a^n) = n\ln a \\ &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,95)} && \text{car } 0,95 < 1 \text{ donc } \ln 0,95 < 0 \end{aligned}$$

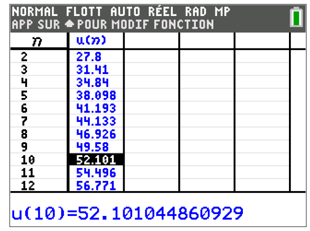
Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,95)} \approx 9,16$.

$$\boxed{100 - 80 \times 0,95^n > 50 \iff n \geq 10.}$$

- A l'aide d'une calculatrice :







$\boxed{100 - 80 \times 0,95^n > 50 \text{ dès que } n \geq 10.}$

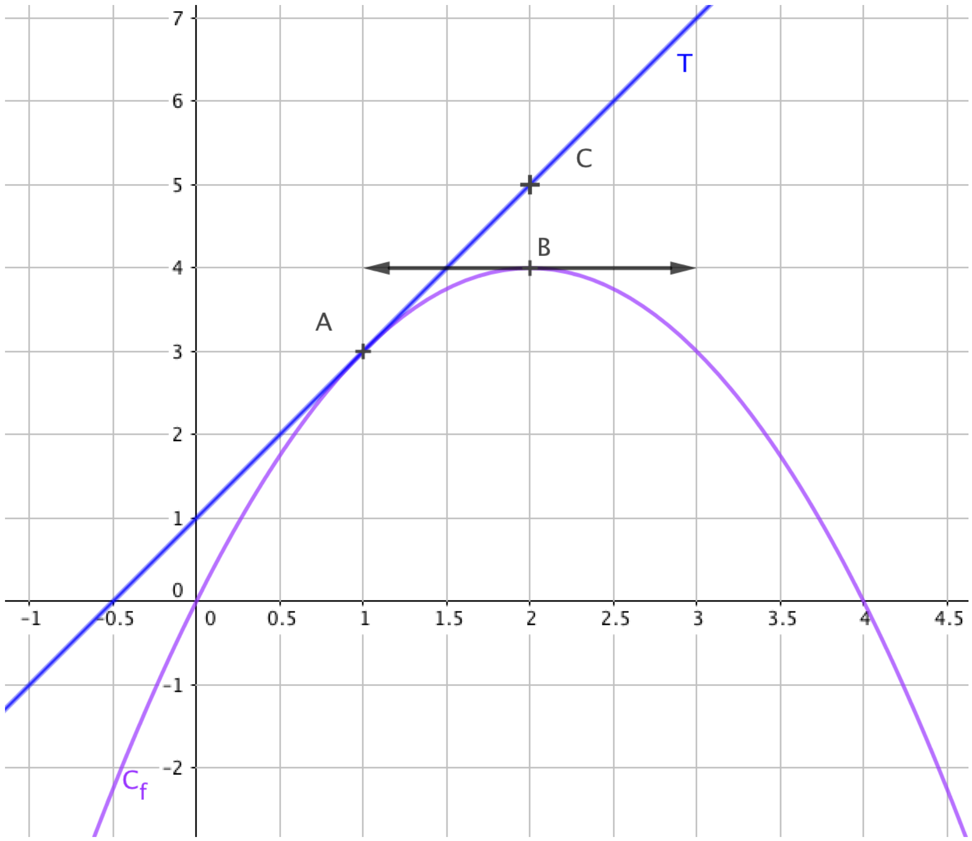
b. En déduire la valeur N affichée par l'algorithme de la partie A.

L'algorithme affiche la plus petite valeur de N pour laquelle $U_n \geq 50$.

$\boxed{\text{La température des pierres du sauna dépassera 50°C au bout de 10 minutes d'utilisation.}}$

Exercice 3

Partie A : Etude graphique
Sur le graphique ci-dessous, C_f est la courbe représentative, dans un repère orthogonal du plan (Unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées), d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
T est la tangente à C_f au point A d'abscisse 1.



1 Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

a. $f(0) = 0$

b. $f'(2) = 0$ car la tangente à C_f au point d'abscisse 2 est horizontale.

c. $f(1) = 3$

d. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la la tangente à C_f au point d'abscisse 1 :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \\ &= \frac{5-3}{2-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(0) = 0; f(1) = 3; f'(2) = 0 \text{ et } f'(1) = 2.}$$

2 Déterminer une équation de T.

T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

✏ $f'(1) = 2$

✏ $f(1) = 3$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 2(x-1)+3, \text{ soit } y = 2x+1}$$

Partie B : Modélisation
On admet qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout réel x

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

1 Calculer $f(0)$, en déduire c.
$f(0) = c$, or $f(0) = 0$ donc $c = 0$.

$$\boxed{c = 0.}$$

2 Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
De l'égalité $f(x) = ax^2 + bx + c$ on déduit $f'(x) = 2ax + b$

3 Exprimer en fonction des réels a et b les nombres suivants $f'(2)$ et $f'(1)$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= 2a \times 2 + b \\ &= 4a + b \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} f'(1) &= 2a \times 1 + b \\ &= 2a + b \end{aligned}$$

4 Déduire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par a et b.

$$\begin{aligned} f'(2) = 0 &\iff 2a \times 2 + b = 0 \\ &\iff 4a + b = 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} f'(1) = 1 &\iff 2a \times 1 + b = 2 \\ &\iff 2a + b = 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les réels } a \text{ et } b \text{ sont donc solutions du système } \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 2a + b = 2 \end{cases}}$$

5 Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

$$\begin{cases} 4a + b = 0 & L_1 \\ 2a + b = 2 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + b = 0 & \\ 2a = 2 & L_1 - L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -4a = -4 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = 4x - x^2.}$$

Partie C - Étude algébrique

On admet que pour tout réel x, $f(x) = 4x - x^2$.

1 Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} 4x = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty \end{aligned}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

2 **a.** Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x(4-x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - x^2 \\ &= x(4-x) \textbf{ en factorisant par } x \end{aligned}$$

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 4-x = -\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

3 **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

De l'égalité $f(x) = 4x - x^2$, on déduit :

$$\boxed{f'(x) = 4 - 2x}$$

b. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

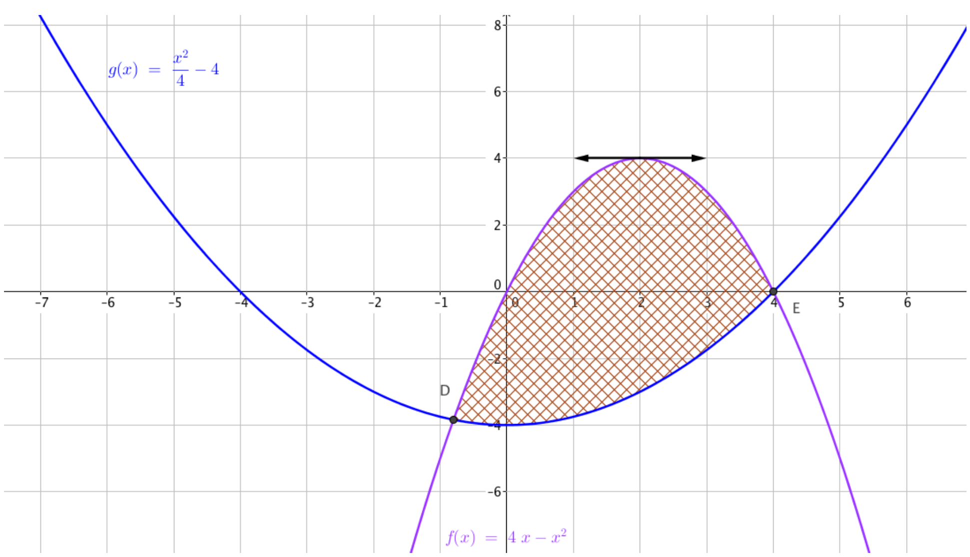
$$\begin{array}{rl|rl} f'(x) = 0 & \iff 4-2x=0 & f'(x) > 0 & \iff 4-2x>0 \\ & \iff -2x=-4 & & \iff -2x>-4 \\ & \iff x=2 & & \iff x<2(-2<0) \end{array}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Partie D - Application

On souhaite déterminer l'aire S en unité d'aire de la surface modélisée par la partie du plan schématisée ci-dessous .



Une modélisation mathématique a permis de représenter cette surface. Dans le plan muni du repère orthogonal du plan (Unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées), cette surface correspond à la partie du plan limitée par :

- les droites d'équations $x = -0,8$ et $x = 4$;
- la courbe représentative C_f de la fonction f étudiée précédemment ;

- la courbe représentative Γ de la fonction g définie par : pour tout réel $x, g(x) = \dfrac{x^2}{4} - 4$.

On précise les coordonnées des points D et E : $D(-0,8;-3,84)$ et $E(4;0)$.

1 Sur l'annexe fournie, hachurer la surface décrite précédemment.
Pour déterminer l'aire S de cette surface, on décompose le calcul en deux parties.

2 On souhaite calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_{-0,8}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$ où h est la fonction dont une expression est :

$$h(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 4x + 4$$

a. Déterminer une primitive H de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} H(x) &= -\frac{5}{4} \times \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \\ &= -\frac{5}{12}x^3 + 2x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{une primitive } H \text{ de la fonction } h \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } H(x) = -\frac{5}{12}x^3 + 2x^2 + 4x.}$$

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.

$$J = \int_{-0,8}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x = H(4) - H(-0,8)$$

$$\begin{aligned} H(4) &= -\frac{5}{12} \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 4 \times 4 \\ &= -\frac{5}{12} \times 64 + 32 + 16 \\ &= -\frac{80}{3} + \frac{144}{3} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(-0,8) &= -\frac{5}{12} \times (-0,8)^3 + 2 \times 0,8^2 - 4 \times 0,8 \\ &= \frac{5}{12} \times \left(\tfrac{4}{5}\right)^3 + 2 \times \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 - 4 \times \left(\tfrac{4}{5}\right) \\ &= \frac{5}{12} \times \frac{64}{125} - \frac{48}{25} \\ &= \frac{16}{75} - \frac{48}{25} \\ &= -\frac{128}{75} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J = \int_{-0,8}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x &= H(4) - H(-0,8) \\ &= \frac{64}{3} + \frac{128}{75} \\ &= \frac{576}{25} \end{aligned}$$

$$\boxed{J = \int_{-0,8}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{576}{25}.}$$

3 **a.** Déterminer la valeur exacte de l'aire S en unité d'aire.
D'après la représentation graphique C_f est située au dessus de Γ sur $[-0,8;4]$,laire délimitée par C_f, Γ et les droites d'équation $x = -0,8$ et $x = 4$ vaut donc en u.a.

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-0,8}^{4} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\
f(x) - g(x) &= 4x - x^2 - \left(\frac{x^2}{4} - 4\right) \\
&= 4x - x^2 - \frac{x^2}{4} + 4 \\
&= -\frac{5}{4}x^2 + 4x + 4 \\
\textbf{Ainsi } J &= \int_{-0,8}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{576}{25}\ u.a.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{576}{25}\ \text{ u.a.}}$$

b. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire S en cm^2.

Ici l'unité daire vaut 2 cm$\times$ 1cm= = 2cm^2.

Laire de S vaut donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{576}{25} \times 2\ \text{cm}^{\ 2} \\
&\frac{1152}{25}\ \text{cm}^{\ 2} \\
&\approx 46,08\ \text{cm}^{\ 2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} \approx 46,1\ \text{cm}^{\ 2} \text{ arrondie à } 10^{-1} \text{ près.}}$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$, dont le tableau de variations, incomplet est le suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	...	0	$-$	
Variations de f	|| $\dots$	↗	$\dots$	↘	1

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1 **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

- Limite en $+\infty$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \textbf{ Limite de référence} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

- Limite en 0^+ : on écrit $f(x) = 1 + \ln x \times \dfrac{1}{x}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

$$\boxed{\text{en ajoutant 1 il vient } \lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty}$$

b. La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle des asymptotes ? Si oui lesquelles ?

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

2 Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
$f = 1 + \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$:

$\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = \ln x \\ v(x) & = x\end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) & = 1\end{array}\right.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln x}{x^2}\end{aligned}$$

3 Étudier le signe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle I.

Comme pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$, car c'est le carré d'un réel non nul, $f'(x)$ a le signe de $1 - \ln x$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff 1 - \ln x = 0\\
&\iff \ln x = 1\\
&\iff \ln x = \ln \mathrm{e}\\
&\iff x = \mathrm{e}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff 1 - \ln x > 0\\
&\iff -\ln x > -1\\
&\iff \ln x < 1\\
&\iff \ln x < \ln \mathrm{e}\\
&\iff x < \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

D'où le tableau de signes de $f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	

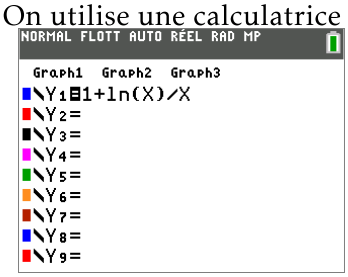
4 Recopier et compléter le tableau des variations de f sur I.

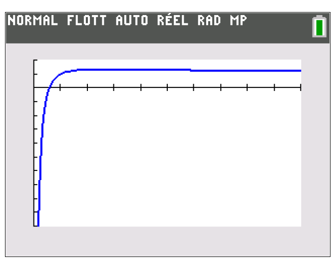
x	$-\infty$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	1

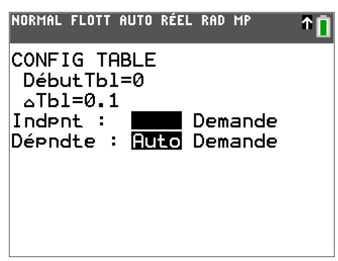
$$f(\mathrm{e}) = 1 + \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ car } \ln \mathrm{e} = 1$$

5 Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$.

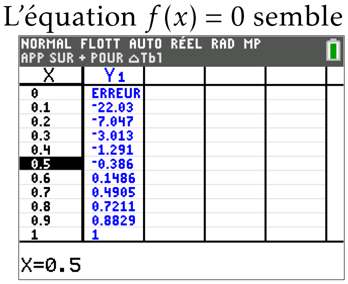
On utilise une calculatrice :

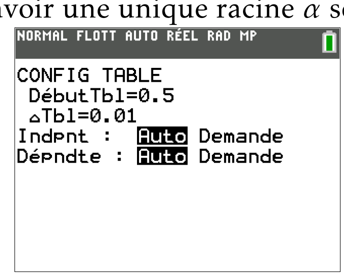


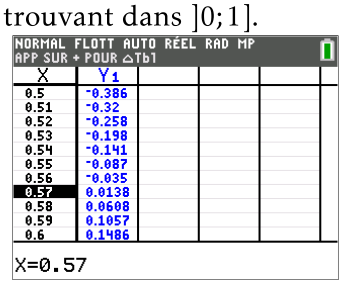




L'équation $f(x) = 0$ semble avoir une unique racine α se trouvant dans $]0;1]$.







L'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dont une valeur approchée à 10^{-2} près vaut 0,57.

6 Soit F la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $F(x) = x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$:

a. Calculer $F'(x)$. Que remarque-t-on ?

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{\ln x}{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\boxed{F'(x) = f(x), \text{ et donc } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0;+\infty[.}$

b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} A = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,dx &= F(\mathrm{e}) - F(1) \\ F(\mathrm{e}) &= \mathrm{e} + \frac{1}{2}(\ln \mathrm{e})^2 \\ &= \mathrm{e} + \frac{1}{2}(1)^2 \text{ car } \ln \mathrm{e} = 1 \\ &= \mathrm{e} + \frac{1}{2} \\ A = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,dx &= F(\mathrm{e}) - F(1) \\ &= \mathrm{e} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \mathrm{e} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(0)^2 \text{ car } \ln 1 = 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,dx = \mathrm{e} - \frac{1}{2}}$$