Nom :	**DM 02**		Oct. 2017
Prénom :		Devoir n° 04	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1

La température de refroidissement d'une pâtisserie à la sortie du four dépend du type de pâtisserie et de la température ambiante supposée constante de la pièce dans laquelle elle est entreposée.
La température d'une tarte à la sortie du four est de 180°C.
L'évolution de la température de la tarte en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par $T_0 = 180$ et, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0,84 \times T_n + 3,2$.
Pour tout entier naturel n, le terme T_n de la suite (T_n) est égal à la température en degrés Celsius de la tarte n minutes après la sortie du four.

PARTIE A

La tarte peut être sortie de son moule dès que sa température est inférieure à 80°C
Pour déterminer au bout de combien de minutes la tarte peut être démoulée, on utilise un algorithme.

1 Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel
	T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à T la valeur 180
TRAITEMENT :	Tant que $T \geqslant 80$
	Affecter à T la valeur $0,84 \times T + 3,2$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

2 Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

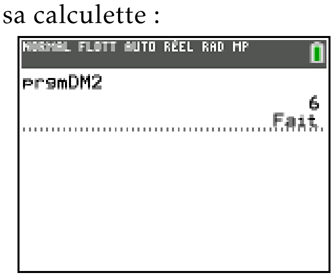
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de T	180	154	133	115	100	87	76
Condition $T \geqslant 80$	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Fausse

3 Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

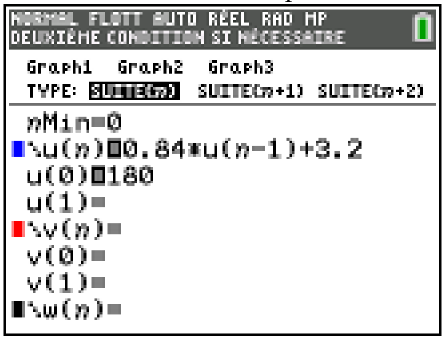
L'algorithme affiche 6 en sortie ; il nous donne le plus petit indice N tel que $T_n \leq 80$.

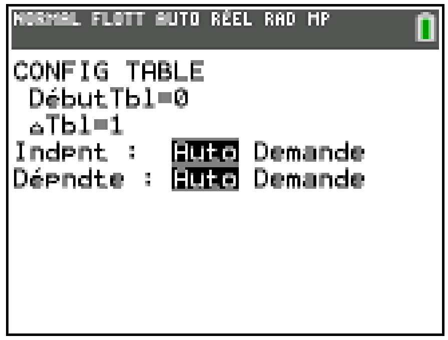
Deux méthodes :

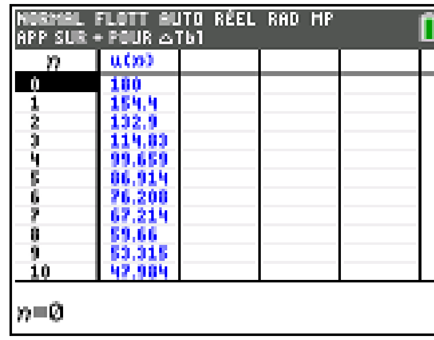
- On saisit le programme dans sa calculette :



- On se met en mode suite pour calculer les termes successifs de la suite :







PARTIE B

1 Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = T_n - 20$.

a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
Pour établir que la suite (V_n) est géométrique, on prouve que $V_{n+1} = q \times V_n$ où q est une constante.

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= T_{n+1} - 20 \\
&= 0,84 \times T_n + 3,2 - 20 \\
&= 0,84 \times T_n - 16,8 \\
&= 0,84\left(T_n - 20\right) \qquad \text{en effet} 20 \times 0,84 = 16,8 \\
&= 0,84 V_n
\end{aligned}$$

Par ailleurs $V_0 = T_0 - 20 = 180 - 20 = 160$.

Pour tout entier n on a $V_{n+1} = 0,84 V_n$; on a donc prouvé que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,84 de premier terme $V_0 = 160$.

b. Exprimer V_n en fonction de n.
Comme la suite (V_n) est géométrique de raison 0,84 de premier terme $V_0 = 160$, on a :

$$\begin{aligned}
V_n &= q^n \times V_0 \\
&= 0,84^n \times 160
\end{aligned}$$

Pour tout entier n on a $V_n = 0,84^n \times 160$.

c. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 160 \times 0,84^n + 20$.
De l'égalité $V_n = T_n - 20$ on déduit $T_n = V_n + 20$

Ainsi pour tout entier n on a $V_n = 20 + 0,84^n \times 160$.

2 Étudier la monotonie de la suite (T_n).
Pour étudier le sens dee variation de la suite (T_n), on forme $T_{n+1} - T_n$ et on étudie son signe :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} - T_n &= 0,84 \times T_n + 3,2 - T_n \\
&= -0,16 T_n + 3,2 \\
&= -0,16\left(160 \times 0,84^n + 20\right) + 3,2 \\
&= -25,6 \times 0,84^n - 0,16 \times 20 + 3,2 \\
&= -25,6 \times 0,84^n - 3,2 + 3,2 \\
&= -25,6 \times 0,84^n
\end{aligned}$$

Pour tout entier n on a :

$$\left.\begin{array}{l} -25,6<0 \\ 0,84^n>0 \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } 25,6\times 0,84^n<0$$

Pour tout entier n, on a donc $T_{n+1}-T_n<0$

$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ est donc strictement décroissante.}}$

3 Calculer la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat.

Comme $0<0,84<1$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,84^n=0$, puis : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} 160\times 0,84^n=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 20=20 \end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=20$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n=20.}$$

Exercice 2

Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largueur. Une allée de 3m de large entoure cette pelouse.
L'aire totale, pelouse et allée, est de 360 m^2.

1 Noter ℓ la largeur, en mètres, de la pelouse. Exprimer en fonction de ℓ :

a. la longueur de la pelouse

$\boxed{\text{La longueur de la pelouse est } 2\ell.}$

b. l'aire totale :
Le terrain (pelouse et allée comprise) est un rectangle de longueur $2\ell+6$ et de largeur $\ell+6$.

$\boxed{\text{L'aire totale est donc } (2\ell+6)(\ell+6).}$

2 Traduire l'énoncé par une équation d'inconnue ℓ.
Résoudre cette équation.

L'aire totale, pelouse et allée, est de 360 m^2 , donc :

$$(2\ell+6)(\ell+6)=360$$

$$\begin{aligned}(2\ell+6)(\ell+6)=360 &\iff 2\ell^2+12\ell+6\ell+36=360\\ &\iff 2\ell^2+18\ell-324=0\\ &\iff \ell^2+9\ell-162=0\end{aligned}$$

$\Delta=b^2-4ac=81-4\times(-162)=729=27^2$

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \ell_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-9+27}{2} & &= \frac{-9-27}{2}\\ &= 9 & &= -18\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Comme } \ell \text{ est une dimension , on déduit } \ell \geq 0 \text{, ainsi on ne retient que } \ell = 9.}$

3 Conclure sur les dimensions de cette pelouse :
Comme la longueur est le double de la largeur, $L = 2\ell = 18$.

$\boxed{\text{La pelouse a pour largeur } \ell = 9 \text{ m et pour longueur } L = 18 \text{ m.}}$