| | | | |
|---|---|---|---|
| Nom : ........................ | **DS** | TSTI2D | Nov. 2016 |
| Prénom : ...................... | | Devoir n° 03 | .../... |

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.* ***Faites des phrases claires et précises.***
*Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.*

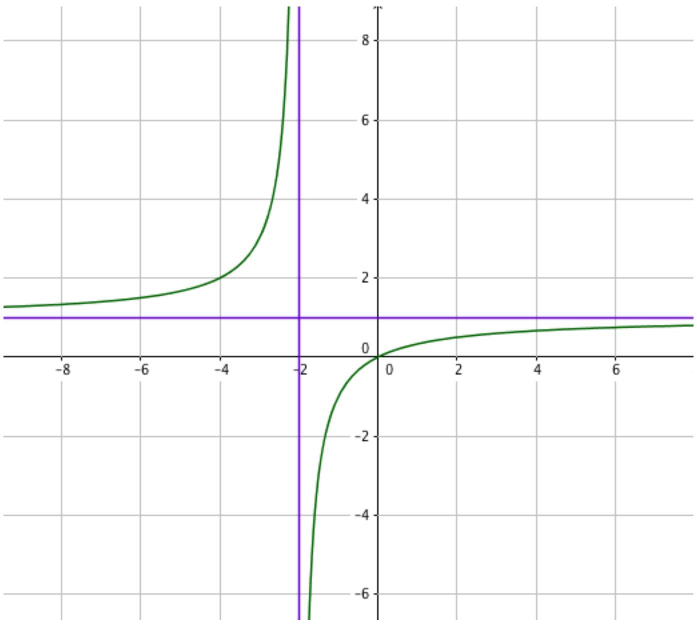
## Exercice 1 — 6 points

(Lecture graphique de limites) Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction $f$ ainsi que les éventuelles droites asymptotes. En déduire :

1.5 pt • sur quel intervalle $f$ est définie ;

4.5 pts • les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Courbe 1



$D_f = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$

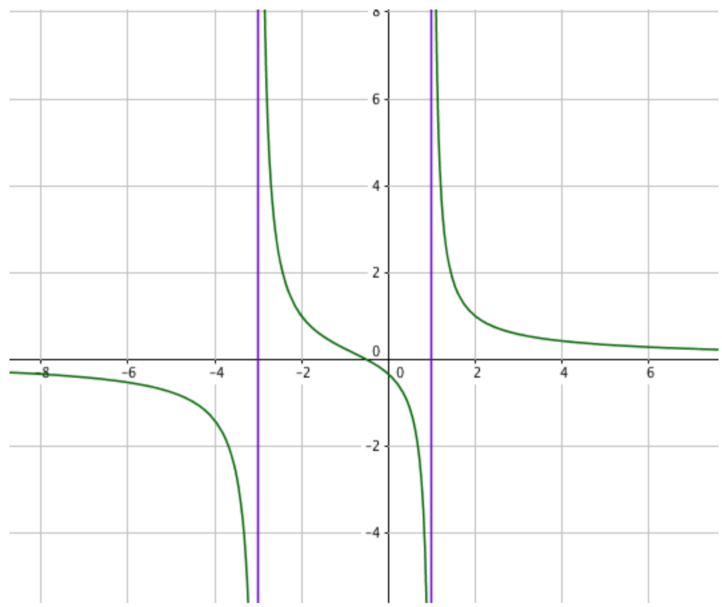
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Courbe 2



$D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3; -1\}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

## Exercice 2 — 8 points

Dans chacun des cas suivants, on donne le tableau de variation d'une fonction $f$ .

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| Variation de $f$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ |

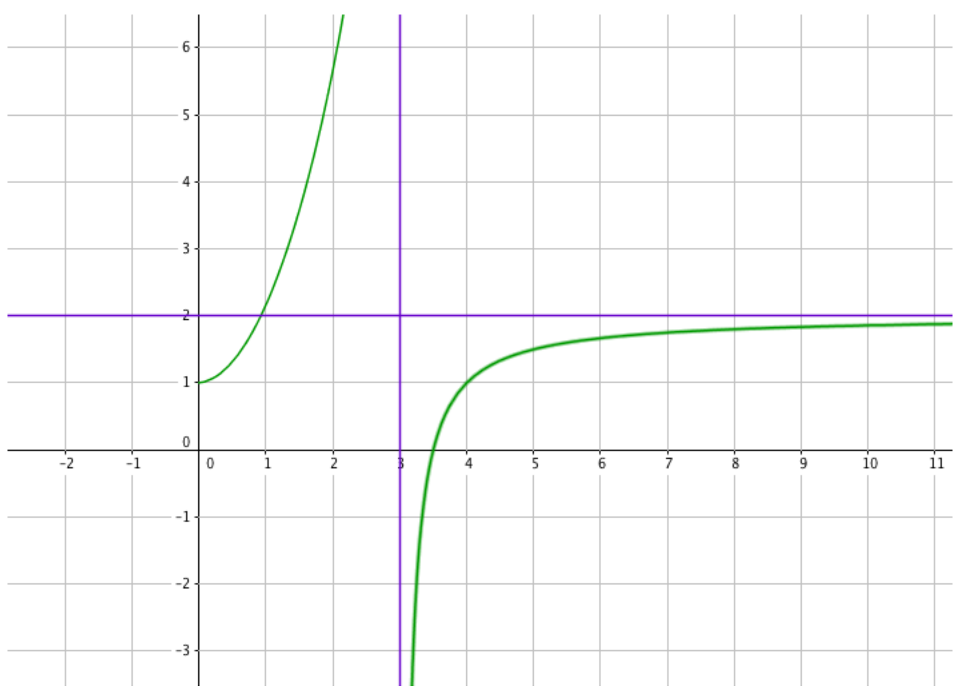
En déduire :

1 pt • sur quel intervalle la fonction $f$ est définie ;
$D_f = [0;3[\cup]3;+\infty[$

3 pts • les limites de $f$ aux bornes de cet intervalle de définition ;
D'après le tableau, on déduit : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$

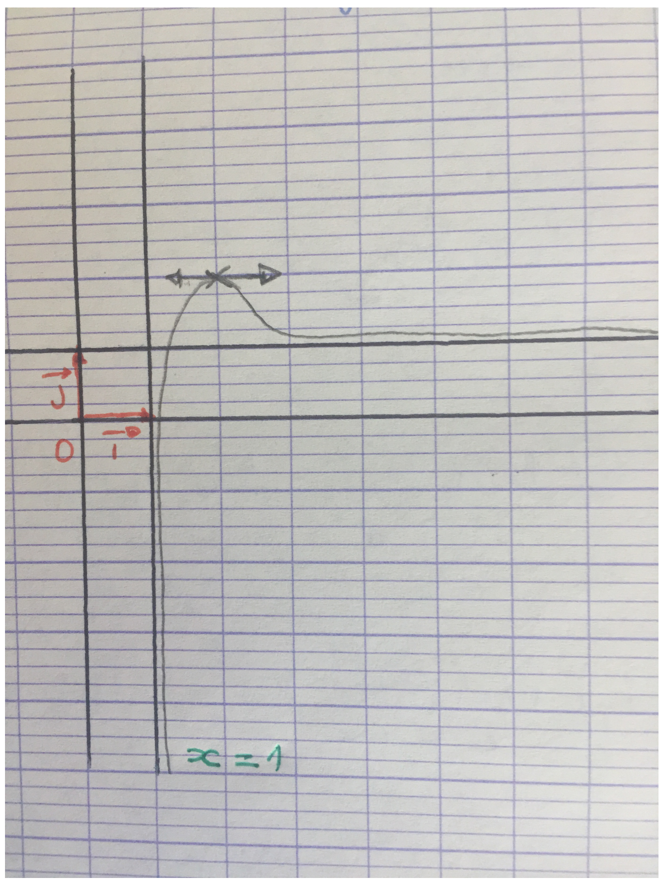
2 pts • une interprétation graphique éventuelle de ces limites ;
Des limites $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$, on déduit que la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $C_f$.
De la limite $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$, on déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $C_f$ au voisinage de $+\infty$.

2 pts • l'allure possible de la courbe représentative de $f$ .



| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variation de $f$ | $\|\|$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ |

- Ensemble de définition :$D_f = ]1;2;+\infty[$
- Limites aux bornes du domaine :
  D'après le tableau de variation, on déduit : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $C_f$.
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $C_f$ au voisinage de $+\infty$.
- Une représentation graphique possible :




## Exercice 3 **3 points**

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction $f$ . Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

1 pt **1** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $C_f$.

1 pt **2** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $C_f$. : : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$, donc la droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à $C_f$ au voisinage de $+\infty$.

1 pt **3** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (4x+3)] = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (4x+3)] = 0$, donc la droite d'équation $y = 4x+3$ est asymptote horizontale à $C_f$ au voisinage de $+\infty$.

## Exercice 4 — 7 points

Calculs de limites guidés

0.5 pt **1** $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x^3 + 5x^2 - x + 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} -5x^3 = -\infty$

1 pt **2** $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 + 5x^2 - x + 3 = \lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty$

1 pt **3** $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - 3x - 4 - x^4 = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^4 = -\infty$

1 pt **4** $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - 3x - 4 - x^4 = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^4 = -\infty$

0.5 pt **5** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2$

1 pt **6** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x+3}{1-2x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

2 pts **7** On veut calculer la limite du quotient $\dfrac{2x+1}{1-x}$ en 1.
Pour faire ces calculs, on étudie le signe du dénominateur :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $(1-x)$ | | + | 0 | - | |

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (1-x) = 0^- \text{ donc } \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x+1}{1-x} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (2x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) = 0^+ \text{ donc } \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x+1}{1-x} = +\infty$$

## Exercice 5 — 4 points

2 pts **1** Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

2 pts **2** Montrer que pour tout réel $x$, on a : $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin(2x)-\cos(2x)$

$$\begin{aligned}
2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) &= 2\left[\sin(2x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(2x)\right]\\
&= 2\left[\sin(2x)\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\cos(2x)\right]\\
&= 2\times\sin(2x)\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{1}{2}\times\cos(2x)\\
&= \sqrt{3}\sin(2x)-\cos(2x)
\end{aligned}$$

Pour tout réel $x$, on a : $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin(2x)-\cos(2x)$