—- *Le 18 décembre 2015*

Bac Blanc : n° I

Le barème sur 60 points est donné à titre indicatif.
Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1

(11 points)

Le QCM !

Exercice 2

(9 points)

Une ville a organisé à partir du 1er janvier 2014, la récupération du verre usagé. Elle a récolté 200 tonnes de verre. On s'attend à ce que chaque année la quantité de verre récupéré par la ville augmente de 25%. Pour entier naturel, on note u_n la quantité de verre récupéré, en tonnes, au cours de l'année $2014 + n$.

1 Quelle sera la quantité de verre récupéré en 2015 ?
On calcule $u_1 = u_0 + 25\% u_0 = 200 + 0,25 \times 200 = 250$.
La quantité de verre récupérée en 2015 sera de 250 tonnes.

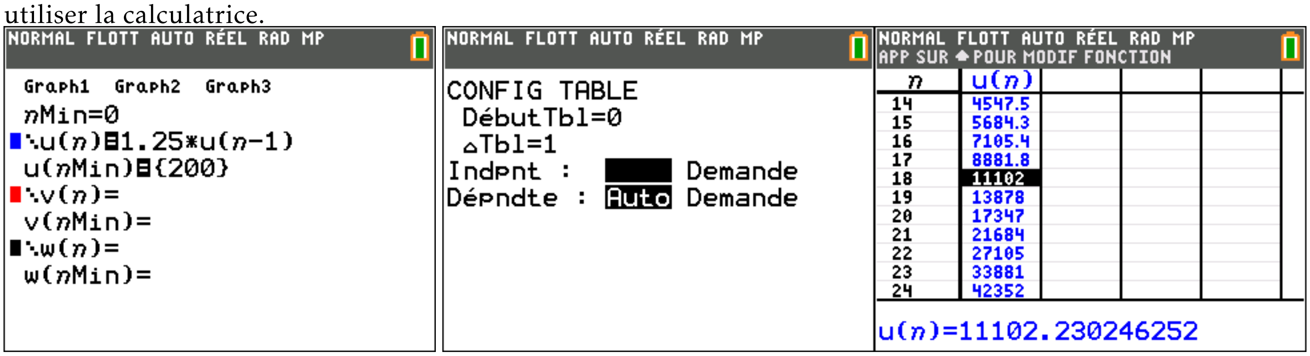
2 **a.** Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
On a, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 0,25u_n \\ u_{n+1} &= u_n \times 1 + 0,25u_n \\ &= (1+0,25)u_n \\ &= 1,25u_n \end{aligned}$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant par $1,25$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison 1,25.

b. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
D'après le cours $u_n = q^n \times u_0 = 1,25^n \times 200$

3 Déterminer au bout de combien d'années, la quantité de verre récupéré aura été multipliée par 50. On pourra utiliser la calculatrice.



18 est donc le plus petit entier qui convient. La quantité de verre récupérée aura été multipliée par 50 au bout de 18 années, c'est-à-dire à partir de 2032.

On cherche le plus petit entier n tel que $u_n \geq 50u_0$, soit $u_n \geq 10\,000$.

4 On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Entrée :
    Saisir le nombre entier naturel P
Initialisation
    Affecter à N la valeur 0
    Affecter à U la valeur 200
Traitement
    Tant que U < 10^P
        Affecter à N la valeur N + 1
        Affecter à U la valeur U × 1,25
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher N
```

a. Quel est l'affichage en sortie lorsque $P = 4$?
Cet algorithme calcule les termes consécutifs de (u_n), tant que celui que $u_n < 10^4$, il calcule donc le plus petit entier N, tel que $u_N \geq 10^4$, l'affichage en sortie pour $P = 4$ sera donc 28 d'après la question précédente.

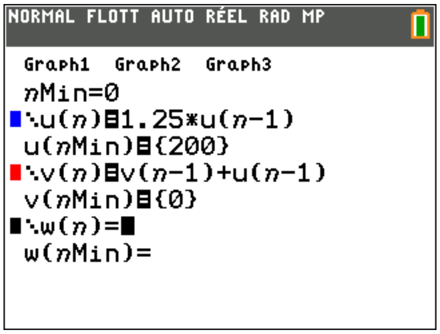
b. Recopier et modifier cet algorithme afin qu'il calcule la somme de toutes les tonnes de verre récupéré chaque année.

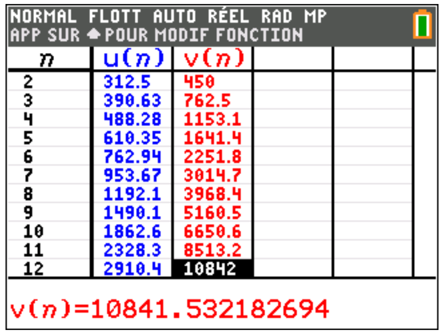
```
Entrée :
    Saisir le nombre entier naturel P
Initialisation
    Affecter à N la valeur 0
    Affecter à U la valeur 200
    Affecter à S la valeur 200
Traitement
    Pour K allant de 1 à 11 faire
        Affecter à U la valeur U × 1,25
        Affecter à S la valeur S + U
    Fin pour
Sortie
    Afficher S
```

5 Calculer, en détaillant, la somme de toutes les tonnes de verre qui seront récupérées entre 2014 et 2025.
On doit donc calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{11}$
S est la somme de $11 - 0 + 1 = 12$ termes de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 200$ de raison $q = 1,25$

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{11} \\ &= \frac{1 - \text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \times \text{Premier terme} \\ &= \frac{1 - 1,25^{11}}{1 - 1,125} \times 200 \\ &= \frac{1,25^{11} - 1}{0,125} \times 200 \\ &= 800 \times \left(1,25^{12} - 1\right) \\ &\approx 10\,841,53 \end{aligned}$$

Entre les années 2014 et 2025, il sera récupéré environ 10 842 tonnes de verre.
Avec une calculatrice :





Exercice 3

(15,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1 Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$(1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}z + 8.$$

$$\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}z + 8 &\iff (1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i}z = 8 + 2\mathrm{i}\\
&\iff (1+\mathrm{i}-2\mathrm{i})z = 8+2\mathrm{i}\\
&\iff (1-\mathrm{i})z = 8+2\mathrm{i}\\
&\iff z = \frac{8+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\\
&\iff z = \frac{(8+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\\
&\iff z = \frac{8+8\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2}{1^2+1^2}\\
&\iff z = \frac{6+10\mathrm{i}}{2}\\
&\iff z = 3+5\mathrm{i}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{3+5\mathrm{i}\}$$

2 Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 3+5\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 3-5\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = 4\mathrm{i}$.

a. Placer A, B et C dans le repère.
Figure à la fin de l'exercice

b. Calculer les modules des nombres complexes $z_{\mathrm{A}}-3$, $z_{\mathrm{B}}-3$ et $z_{\mathrm{C}}-3$. En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

$\begin{aligned}\lvert z_A-3\rvert &= \lvert 3+5\mathrm{i}-3\rvert\\ &= \lvert 5\mathrm{i}\rvert\\ &= 5\end{aligned}$	$\begin{aligned}\lvert z_B-3\rvert &= \lvert 3-5\mathrm{i}-3\rvert\\ &= \lvert -5\mathrm{i}\rvert\\ &= 5\end{aligned}$	$\begin{aligned}\lvert z_C-3\rvert &= \lvert 4\mathrm{i}-3\rvert\\ &= \lvert -3+4\mathrm{i}\rvert\\ &= \sqrt{3^2+4^2}\\ &= \sqrt{25}\\ &= 5\end{aligned}$

Ainsi on a

$$|z_A-3| = |z_A-3| = |z_A-3| = 5$$

Ce qui, en posant $z_F = 3$ s'écrit :

$$|z_A-z_F| = |z_A-z_F| = |z_A-z_F| = 5$$

Soit

$$FA = FB = FC = 5$$

Donc les points A, B et C sont sur le cercle de centre F de rayon 5.

c. Quelle est la nature du triangle ABC ?
Prouvons que le triangle ABC est rectangle en C.

$$\begin{array}{ll|ll} z_{\overrightarrow{CA}} & = z_A - z_C & z_{\overrightarrow{CB}} & = z_B - z_C \\ & = 3+5\mathrm{i}-4\mathrm{i} & & = 3-5\mathrm{i}-4\mathrm{i} \\ & = 3+\mathrm{i} & & = 3-9\mathrm{i} \end{array}$$

On a ainsi $\overrightarrow{CA} : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} : \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = XX' + YY' = 3 \times 3 + 1 \times (-9) = 0$

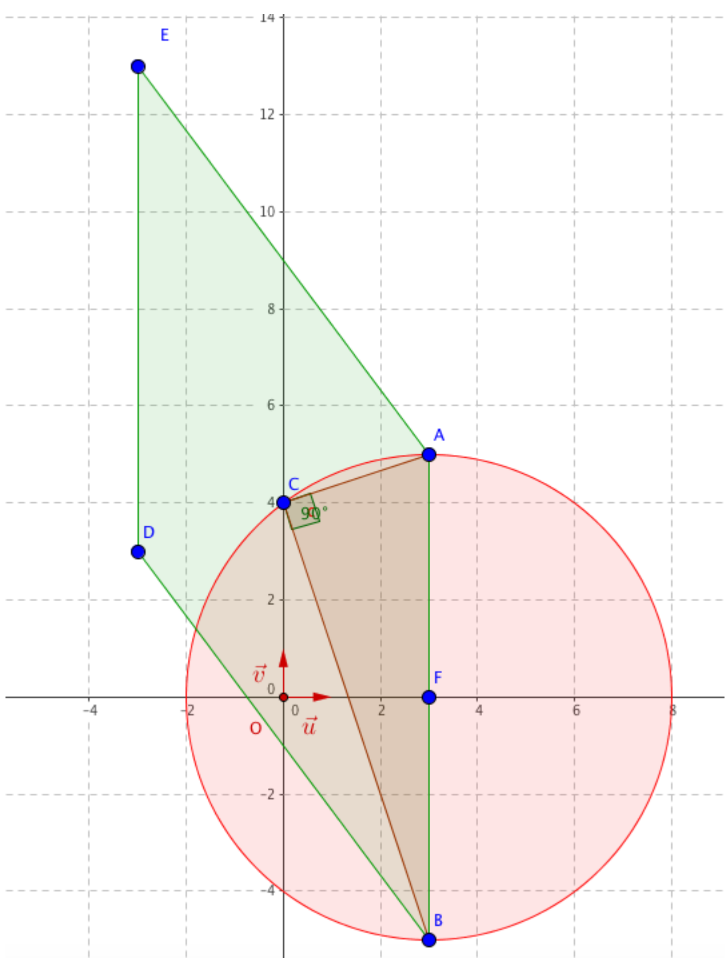
Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, ce qui prouve que ABC est rectangle en C.

3 Soit D le symétrique de A par rapport à C et E le symétrique de B par rapport à C. Placer les points D et E dans le repère.

a. Calculer $z_B - z_A$ puis $z_D - z_E$
Tout d'abord, on lit sur le graphique les affixes des points D et E : $z_D = -3+3\mathrm{i}$ et $z_E = -3+13\mathrm{i}$

$$\begin{array}{ll|ll} z_B - z_A & = 3-5\mathrm{i}-3-5\mathrm{i} & z_D - z_E & = -3+3\mathrm{i}+3-13\mathrm{i} \\ & = -10\mathrm{i} & & = -10\mathrm{i} \end{array}$$

b. Montrer que le quadrilatère ABDE est un losange.
On a donc $z_B - z_A = z_D - z_E$ ce qui donne $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{ED}}$, soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, ce qui prouve que ABDE est un parallélogramme.
Par ailleurs comme le triangle ABC est rectangle en C, on peut affirmer que les diagonales [AB] et [DE] du parallélogramme ABDE sont perpendiculaires, c'est donc un losange.



Exercice 4

(7 points)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

1 Déterminer une forme trigonométrique de z_1.
Le module du nombre complexe $z_1 = 1 - i$ est :

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{1+1} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Un argument θ du nombre complexe $z_1 = 1 - i$ est tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

D'où z_1 a pour argument $\theta = -\frac{\pi}{4}$
Une écriture trigonométrique de z_1 est donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

2 Déterminer l'écriture algébrique de z_2.

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

3 Soit $Z = z_1 \times z_2$.

a. Déterminer l'écriture algébrique de Z.

$$\begin{aligned} Z = z_1 \times z_2 &= (1-i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i^2 \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

L'écriture algébrique de Z est donc $Z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b. Déterminer une forme exponentielle de Z.

$$\begin{aligned} Z = z_1 \times z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \times e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \\ &= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{4}} \times e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \\ &= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right)} \\ &= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{-3\pi}{12} + \frac{10\pi}{12}\right)} \\ &= \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

Une forme exponentielle de Z est donc $Z = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$

c. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

On a $Z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $Z = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(7\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

Ainsi

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{a}{r} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \frac{b}{r} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

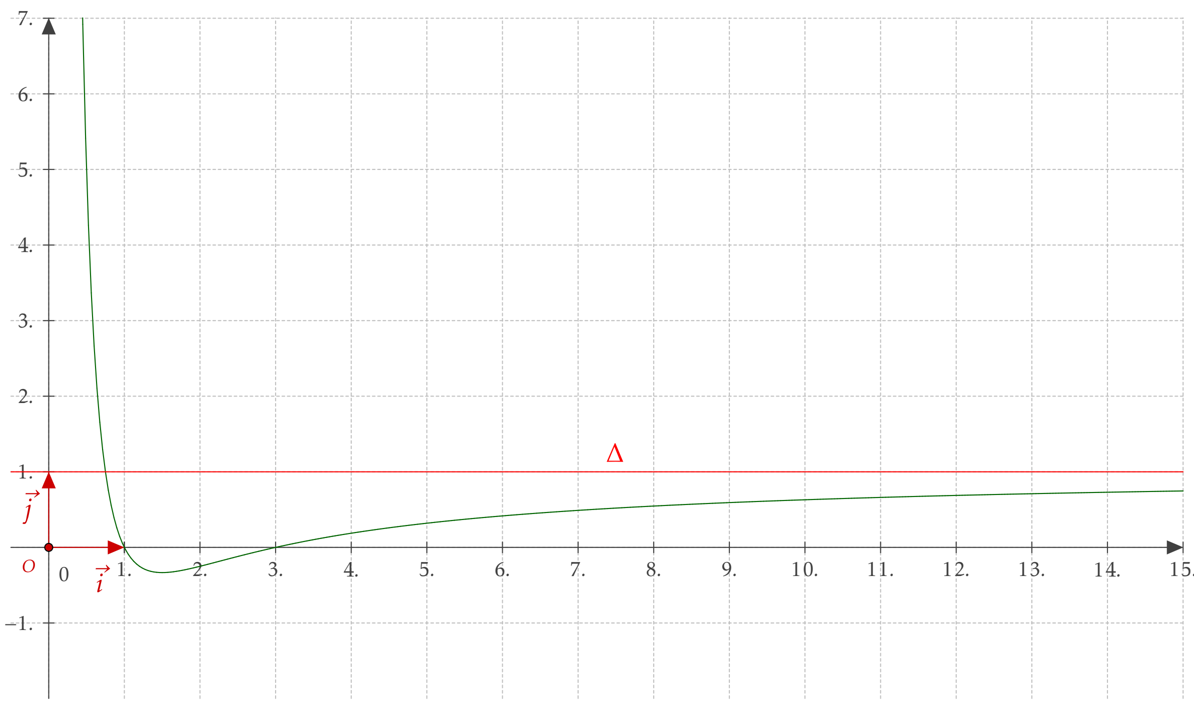
On a donc $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 5

(17,5 points)

Partie A : 7 points

La fonction g définie sur $]0;+\infty[$, dont la représentation graphique $\mathcal{C}$ obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure si dessous.



On précise que la courbe $\mathcal{C}$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite Δ , qui est parallèle à l'axe des abscisses, comme asymptotes.

1 Déterminer par lecture graphique $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

- par lecture graphique $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ car l'axe des abscisses est asymptote verticale.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ car la droite $\Delta : y = 1$ est asymptote horizontale.

2 Donner dans un tableau le signe de $g(x)$ quand x varie dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		3		$+\infty$
signe de $g(x)$	||	$+$	0	-	0	$+$	

3 On admet que pour tout x de $]0;+\infty[$, $g(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2}$, où a et b sont deux constantes réelles.

a. Lire $g(1)$ et $g(3)$ sur la figure.
On lit $g(1)=0$ et $g(3)=0$ Dans la suite de l'exercice on admet que la fonction g est de la forme $g(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2}$.

b. Calculer $g(1)$ et $g(3)$ et en déduire un système de deux équations à deux inconnues permettant d'obtenir les valeurs de a et b.

$$\begin{array}{ll|ll} g(1)=0 & \Longleftrightarrow \dfrac{1+a+b}{1}=0 & g(3)=0 & \Longleftrightarrow \dfrac{9+3a+b}{9}=0 \\ & \Longleftrightarrow 1+a+b=0 & & \Longleftrightarrow 9+3a+b=0 \\ & \Longleftrightarrow a+b=-1 & & \Longleftrightarrow 3a+b=-9 \end{array}$$

a et b sont donc solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=-1 \\ 3a+b=-9 \end{array}\right.$$

c. Résoudre le système obtenu à la question c. et en déduire une expression de $g(x)$.

$$\left\{\begin{array}{rl} a+b & =-1 \\ 3a+b & =-9 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -a-b & =1 \\ 3a+b & =-9 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 2a & =-8 \\ b & =-9-3a \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} a & =-4 \\ b & =3 \end{array}\right.$$

La fonction g est donc définie sur $]0;+\infty[$, par $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$

Partie B : 10, 5 points

La fonction f définie sur $]0;+\infty[$, par $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$

1 Calculer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$.

- En $+\infty$, une fraction rationnelle a la même limite que celle du quotient de ses termes de plus degré, ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}=1$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, on peut affirmer que la droite $\Delta : y=1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- En 0^+ ; on a $\lim\limits_{x\to0^+} x^2=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0+} x^2-4x+3=3 \\ \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x^2}=+\infty=+\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to0+} f(x)=+\infty$$

Comme $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=+\infty$, on peut affirmer que la droite $\Delta_1 : x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2 Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
$f=\dfrac{u}{v}$; donc $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
Ici :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x)=x^2-4x+3 \\ v(x)=x^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u'(x)=2x-4 \\ v'(x)=2x \end{array}\right.$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-4)x^2-(2x)(x^2-4x+3)}{x^4}\\
&= \frac{2x^3-4x^2-2x^3+8x^2-6x}{x^4}\\
&= \frac{4x^2-6x}{x^4}\\
&= \frac{2x(2x-3)}{x^3\times x}\\
&= \frac{2(2x-3)}{x^3}
\end{aligned}
$$

Comme on travaille sur $]0;+\infty[$, on déduit $x>0$, puis $x^3>0$,

Sur $]0;+\infty[$ on a : $\left.\begin{array}{l} 2>0 \\ x^3>0 \end{array}\right\}$ donc $f(x)$ est du signe de $(2x-3)$ qui est une fonction affine , ainsi elle du signe de $a=2$ après le zéro.

On peut aussi étudier le signe de la dérivée à partir d'un tableau de signes.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $(2x-3)$		-	0	+	
signe de x^3	0	+		+	
signe de $f'(x)$	||	-	0	+	

3 Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.

- pour tout réel x de $\left]0;\frac{3}{2}\right[$, on a $f'(x)<0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{3}{2}\right[$.
- pour tout réel x de $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, on a $f'(x)>0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{9}{4}-4\times\frac{3}{2}+3}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{9-12}{4}}{\frac{9}{4}}=-\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=-\frac{1}{3}$

4 Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
T a pour équation $y=f'(3)(x-3)+f(3)$.

- $f(3)=0$
- $f'(3)=\frac{2\times(2\times3-3)}{3^3}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$
- $T : y=\frac{2}{9}(x-3)$

La tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 a pour équation $y=\frac{2}{9}(x-3)$