TITEC.2 2015

Devoir nº 10

Mai 2015

Nom : .... *Durée:* 1^h *Calculatrice autorisée*

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

Exercice I

Une entreprise de transport dispose d'un nombre important de camions. On admet que la distance quotidienne parcourue par chaque camion, exprimée en kilomètres, peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 500 et d'écart type 40.

1) Donner la distance moyenne parcourue en un jour par un camion.
2) Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure au moins 500 km en un jour.
3) Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure entre 380 km et 460 km en un jour.
4) Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure plus de 460 km en un jour.
5) Le directeur de l'entreprise affirme qu'environ 95 % de ses camions parcourent entre 460 et 540 km par jour. A-t-il raison ?

Exercice II

Un grand constructeur automobile propose une nouvelle gamme de véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium.

Partie A

On s'intéresse à l'autonomie en kilomètres de cette nouvelle gamme de véhicules.
Soit X la variable aléatoire qui à un véhicule tiré au hasard associe son autonomie en km.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 104$ et d' écart type $\sigma = 6$.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.
On considère qu'un véhicule est conforme lorsque son autonomie est comprise entre 92 et 116.
Déterminer la probabilité que le véhicule soit déclaré conforme.

Partie B

Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir leur certificat de conformité.
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules choisis au hasard dans la production associe le nombre de véhicules non-conformes dans cet échantillon.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.
On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non-conforme est 0,05.

1) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
2) Calculer la probabilité de l' évènement « dans l' échantillon prélevé au hasard, tous les véhicules sont conformes ». On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

Partie C

Le constructeur automobile veut juger de l'impact d'une campagne publicitaire menée dans les médias pour la vente de cette nouvelle gamme de véhicules.
Dans un échantillon, considéré comme prélevé au hasard et avec remise, de 1 000 véhicules produits, on constate la vente de 148 véhicules avant la campagne publicitaire.
Sur une même période, après la campagne publicitaire, pour un échantillon de même taille et prélevé dans les mêmes conditions, on constate la vente de 177 véhicules.
Que peut-on en conclure sur la campagne publicitaire ?
Vous pourrez déterminer les intervalles de confiance avec un niveau de confiance de 95 % correspondant à chacune de ces situations.

▶ I. corrigé

Exercice 1

1) Pour une loi normale, la moyenne est égale à l'espérance.

2) Déterminons la probabilité qu'un camion parcoure au moins 500 km en un jour. $P(X > 500) = 1 - P(X \leqslant 500) = 0{,}5$.

3) Déterminons la probabilité qu'un camion parcoure entre 380 km et 460 km en un jour. $P(380 \leqslant X \leqslant 460) = 0{,}1573$.

4) Déterminons la probabilité qu'un camion parcoure plus de 460 km en un jour.

   $P(X > 460) = 1 - P(X \leqslant 460) = 0{,}8414$.

5) Le directeur de l'entreprise affirme qu'environ 95 % de ses camions parcourent entre 460 et 540 km par jour. Le directeur a tort car $460 = \mu - \sigma, \quad 540 = \mu + \sigma$ et $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$.

Exercice 2

Un grand constructeur automobile propose une nouvelle gamme de véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium.

Partie A

On s'intéresse à l'autonomie en kilomètres de cette nouvelle gamme de véhicules.
Soit X la variable aléatoire qui à un véhicule tiré au hasard associe son autonomie en km.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 104$ et d' écart type $\sigma = 6$.
On arrondira les résultats à 10^{-2} près.
On considère qu'un véhicule est conforme lorsque son autonomie est comprise entre 92 et 116.
Déterminer la probabilité que le véhicule soit déclaré conforme.

On calcule $P(92 \leqslant X \leqslant 116) = NormalFRép(92{,}116{,}104{,}6) \approx 0.9545$

Partie B

Les véhicules sont parqués par lots de 75 avant de recevoir leur certificat de conformité.
Soit Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules choisis au hasard dans la production associe le nombre de véhicules non-conformes dans cet échantillon.
La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.
On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non-conforme est 0,05.

1) Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
   On est en présence d'un schéma de Bernoulli :
   On choisit au hasard un véhicule de cette production.
   Succès : « le véhicule est non conforme »avec la probabilité $p = 0{,}05$
   Echec : « le véhicule est conforme »avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}95$
   On répète 75 fois cette expérience de façon indépendante et Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules choisis au hasard dans la production associe le nombre de succès, ainsi Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(75; 0{,}05)$.

2) Calculer la probabilité de l' évènement « dans l' échantillon prélevé au hasard, tous les véhicules sont conformes ». On arrondira le résultat à 10^{-2} près. « dans l' échantillon prélevé au hasard, tous les véhicules sont conformes »signifie $Y = 0$

   Pour tout entier k ;$0 \leqslant k \leqslant n$

   $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
   Ici $P(Y = 0) = BinomFdP(75{,}0.05{,}0) \approx 0{,}021$

Partie C

Le constructeur automobile veut juger de l'impact d'une campagne publicitaire menée dans les médias pour la vente de cette nouvelle gamme de véhicules.
Dans un échantillon, considéré comme prélevé au hasard et avec remise, de 1 000 véhicules produits, on constate la vente de 148 véhicules avant la campagne publicitaire.
Sur une même période, après la campagne publicitaire, pour un échantillon de même taille et prélevé dans les mêmes conditions, on constate la vente de 177 véhicules.
Que peut-on en conclure sur la campagne publicitaire ?
Vous pourrez déterminer les intervalles de confiance avec un niveau de confiance de 95 % correspondant à chacune de ces situations.
On calcule les intervalles de confiance correspondant à avant et après la publicité.

- Avant la campagne de publicité :
  l'intervalle de confiance au seuil de 95% est environ :

  $$\left[f_1 - 1{,}96\frac{\sqrt{f_1(1-f_1)}}{\sqrt{n}}\ ;\ f_1 + 1{,}96\frac{\sqrt{f_1(1-f_1)}}{\sqrt{n}}\right]$$

  Avant la campagne de publicité $f_1 = \dfrac{148}{1000} = 0.148$ On a $n = 1000 \geqslant 30$; $nf_1 = 148 \geqslant 5$ et $n(1-f_1) = 852 \geqslant 5$
  Les conditions d'utilisation de l'intervalle de confiance sont donc réunies.

  $$I_1 \approx \left[0{,}148 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}148\times 0{,}852}}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0{,}148 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}148\times 0{,}852}}{\sqrt{1000}}\right] \approx [0{,}126; 0{,}170]$$

- Après la campagne de publicité :
  l'intervalle de confiance au seuil de 95% est environ :

  $$\left[f_2 - 1{,}96\frac{\sqrt{f_2(1-f_2)}}{\sqrt{n}}\ ;\ f_2 + 1{,}96\frac{\sqrt{f_2(1-f_2)}}{\sqrt{n}}\right]$$

  Avant la campagne de publicité $f_2 = \dfrac{177}{1000} = 0.177$ On a $n = 1000 \geqslant 30$; $nf_2 = 177 \geqslant 5$ et $n(1-f_2) = 823 \geqslant 5$
  Les conditions d'utilisation de l'intervalle de confiance sont donc réunies.

  $$I_2 \approx \left[0{,}177 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}177\times 0{,}823}}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0{,}177 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}177\times 0{,}823}}{\sqrt{1000}}\right] \approx [153; 0{,}201]$$

- Les intervalles I_1 et I_2 ont une partie commune importante ; l'écart entre f_1 et f_2 a donc de fortes chances d'être le résultat de la seule fluctuation d'échantillonnage. La différence des fréquences observées f_1 et f_2 n'est pas significative et on juge, avec un petit risque d'erreur, que les proportions p_1 et $p_2$sont égales.