Nom : .... *Prénom :*	**DS 09**	TSTI2D OISELET *Devoir nº 13*	*Avril 2023* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 4,5 points

4.5 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.*
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;
- si le joueur choisit le monde B, la probabilité qu'il perde la partie est de $\frac{2}{3}$;

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1 La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{3}{25}$ **c.** $\frac{7}{25}$ **d.** $\frac{24}{125}$

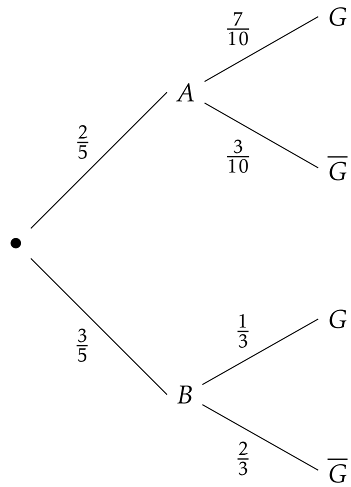
On veut ici calculer $P(A \cap G) = P(A) \times P_G(A) = \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$

La bonne réponse est c.

2 La probabilité $P(G)$ de l'événement G est égale à :

a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{15}$ **d.** $\frac{12}{25}$

L'arbre représentant la situation :



$$\begin{aligned} P(G) &= P(A\cap G)+P(B\cap G)\\ &= \frac{2}{5}\times\frac{7}{10}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\\ &== \frac{7}{25}+\frac{1}{5}\\ &= \frac{12}{25}\end{aligned}$$

La bonne réponse est d.

3 La probabilité $P_G(B)$ de l'événement B sachant que G est réalisé est égale à :

a. $\frac{5}{12}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{15}$ **d.** $\frac{1}{5}$

La probabilité $P_G(B)$ de l'événement B sachant que G est réalisé est égale à :

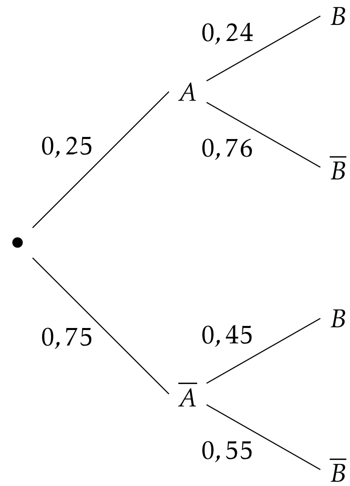
$$\begin{aligned} P_G(B) &= \frac{P(G\cap B)}{P(G)}\\ &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{12}{25}}\\ &= \frac{1}{5}\times\frac{25}{12}\\ &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

La bonne réponse est a.

Exercice 2 — 5 points

Dans une population donnée, on étudie des caractères génétiques de deux sortes, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.
On choisit au hasard une personne dans la population. On note A l'événement « la personne possède le caractère $\mathscr{A}$ » et B l'événement « la personne possède le caractère $\mathscr{B}$ ».
Claire a construit l'arbre suivant ⋯

1 pt **1** Complétons l'arbre de probabilités de l'énoncé.



2.5 pts **2** **a.** Trouver $p(B)$ et $p\left(\overline{B}\right)$

On utilise la partition $B, \overline{B}$:

$$\begin{aligned} p(B) &= p\left(A \cap B\right) + p\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,25 \times 0,24 + 0,75 \times 0,45 \\ &= 0,3975 \end{aligned}$$

On déduit alors $p\left(\overline{B}\right) = 1 - p(B) = 1 - 0,3975 = 0,6025$

$$\boxed{p(B) = 0,3975 \text{ et } p\left(\overline{B}\right) = 0,6025}$$

1.5 pt **b.** Quelle est la probabilité qu'une personne ne possède pas le caractère $\mathscr{A}$ sachant qu'elle possède le caractère $\mathscr{B}$?

On veut ici calculer la probabilité conditionnelle : $p_B\left(\overline{A}\right)$:

$$\begin{aligned} p_B\left(\overline{A}\right) &= \frac{p\left(\overline{A} \cap B\right)}{p(B)} \\ &= \frac{0,75 \times 0,45}{0,3975} \\ &= \frac{45}{53} \approx 0,849 \end{aligned}$$

La probabilité qu'une personne ne possède pas le caractère $\mathscr{A}$ sachant qu'elle possède le caractère $\mathscr{B}$ est $p_B\left(\overline{A}\right) = \dfrac{45}{53} \approx 0,849$

Exercice 3 **8 points**

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

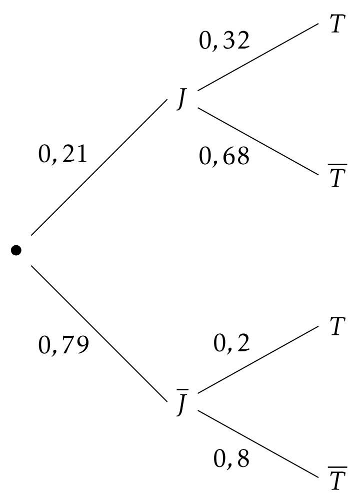
- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans.
  Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;

- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les évènements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les évènements contraires de J et T.

2 pts **1** Représenter la situation par un arbre pondéré.



2 pts **2** Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.

$$\begin{aligned} P(J \cap T) &= P(J) \times P_J(T) \\ &= 0,21 \times 0,32 \\ &= 0,0672 \end{aligned}$$

> la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels vaut 0,0672.

2 pts **3** Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(J \cap T) + p\left(\overline{J} \cap T\right) \\ &= p(J) \times p_J(T) + p\left(\overline{J}\right) \times p_{\overline{J}}(T) \\ &= 0,0672 + 0,79 \times 0,2 \\ &= 0,2252 \end{aligned}$$

> la valeur exacte de la probabilité de T 0,2252.

2 pts **4** On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels.
Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est $0,30$ à 10^{-2} près.
On veut ici calculer $P_T(J)$.

$$\begin{aligned} p_T(J) &= \frac{p(J \cap T)}{p(T)} \\ &= \frac{0,0672}{0,2252} \\ &\approx 0,30 \end{aligned}$$

Exercice 4 — 2 points

2 pts On donne deux évènements A et B tels que $p(A) = 0.15$, $p(B) = 0.4$ et $p(A \cup B) = 0.72$.A et B sont-ils indépendants? Justifier.

Comme $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, on déduit $p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B)$,donc :

$$\begin{aligned} p(A\cap B) &= p(A) + p(B) - p(A\cup B) \\ &= 0,35 + 0,4 - 0,72 \\ &= 0,03 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} p(A)\times p(B) &= 0,15 \times 0,4 \\ &= 0,06 \\ &\neq p(A\cap B) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ayant } p(A\cap B) \neq p(A)\times p(B)\text{, les deux évènements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$

Exercice 5 — 7 points

La courbe $\mathcal{C}$ de la figure est la courbe représentative, dans un repère orthogonal (unités graphiques :2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées) d'une fonction f définie sur I =[- 1,3]. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses, ainsi que celle au point d'abscisse 0.

1 pt **1** À partir du graphique, construire le tableau de variation de f.

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

1.5 pt **2** Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$, $f(-1)$ et $f(1)$.

$\boxed{f(-1) = 0, f(0) = 4 \text{ et } f(1) = 2}$

2 pts **3** On admet que la fonction f est définie sur $[-1, 3]$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où a, b, c sont des constantes réelles à déterminer.À l'aide des résultats obtenus à la question 2., calculer la valeur des nombres réels a, b et c.

- $$\begin{aligned} f(0) = 4 &\iff a\times 0^3 + b\times 0^2 + c = 4 \\ &\iff c = 4 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(1) = 2 &\iff a\times 1^3 + b\times 1^2 + c = 2 \\ &\iff a + b + 4 = 2 \\ &\iff a + b = -2 \end{aligned}$$

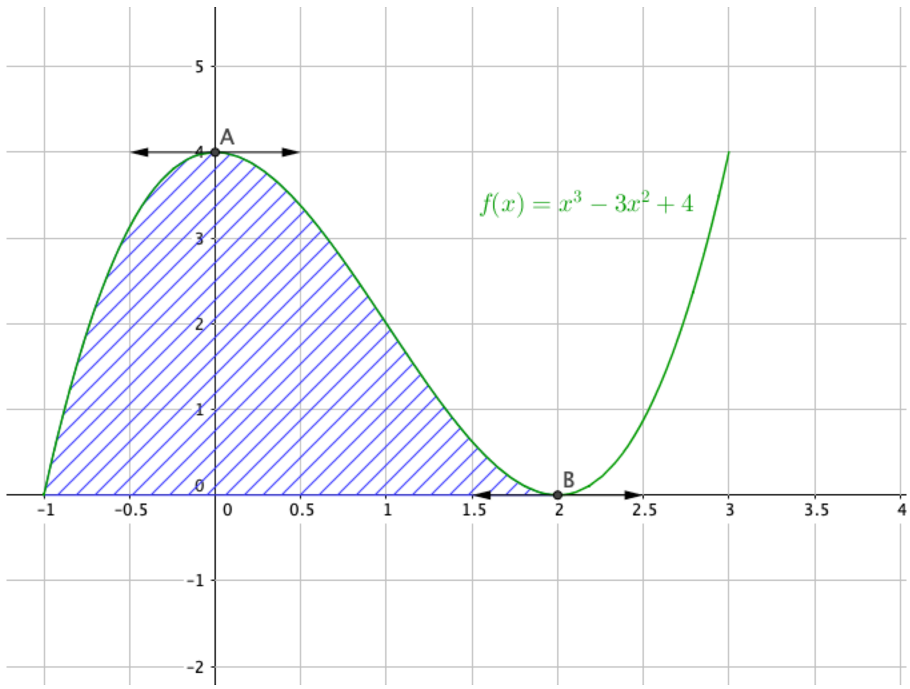
- $$\begin{aligned} f(-1) = 0 &\iff a\times (-1)^3 + b\times (-1)^2 + c = 2 \\ &\iff -a + b + 4 = 0 \\ &\iff -a + b = -4 \end{aligned}$$

On résout le système

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ -a+b=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=-2 \\ 2b=-6 \end{cases} \begin{cases} b=-3 \\ a=-2-b=1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de I, on a } f(x)=x^3-3x^2+4}$$

2.5 pts **4** On admet par la suite, que pour tout x de I, on a $f(x)=x^3-3x^2+4$.
Calculer la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan hachurée.



D'après le graphique, la fonction f est positive sur $[-1;2]$, l'aire hachurée vaut donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(2)-F(-1) \\
& f(x)=x^3-3x^2+4 \\
& F(x)=\tfrac{x^4}{4}-x^3+4x \\
F(2) &= \tfrac{2^4}{4}-2^3+4\times 2 \\
&= 4-8+8=4 \\
F(-1) &= \tfrac{(-1)^4}{4}-(-1)^3+4\times(-1) \\
&= \tfrac{1}{4}+1-4=\tfrac{1}{4}-3=\tfrac{1}{4}-\tfrac{12}{4}=-\tfrac{11}{4} \\
\\
\mathcal{A} = &= 4+\tfrac{11}{4}=\tfrac{27}{4}
\end{aligned}$$

$\mathcal{A}=\frac{27}{4}u.a.$, ici l'unité d'aire vaut 2 cm × 1cm = 2cm^2.
$\mathcal{A}=\frac{27}{4}u.a.=\frac{27}{4}\times 2cm^2=13,5cm^2$

$$\boxed{\mathcal{A}=13,5\ cm^2}$$