Mathématiques en TS 2019 - 2020

Lycée l'Oiselet

TS4

Année Scolaire 2019 - 2020

Cours de Maths

Luc Giraud

Case des Maths

20 mars 2020

CASE DES MATHS

TD Calcul intégral

1. Cours du 16 mars 2020

1.1. Avant propos

Une autre façon de travailler ...

1.2. Objectifs de la séance

Plan de la séance 1

1. Mettre en place une nouvelle méthode de travail
2. Apprendre à utiliser les propriétés du cours sur intégrales et inégalités

Exercice 2

Encadremment et valeur moyenne

1) Comparer, sans les calculer les réels I et J.

   a) $I = \displaystyle\int_1^2 x\,e^x\,\mathrm{d}x$ b) $J = \displaystyle\int_1^2 x^2\,e^x\,\mathrm{d}x$

2) Démontrer les encadrements suivants :

   a) $\dfrac{9}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant 9$ c) $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$

   b) $\sqrt{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \leqslant 3$ d) $2e^{-4} \leqslant \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

   e) $2\ln 3 \leqslant \displaystyle\int_2^4 \ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$

3) La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

   a) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.

   b) Est-elle convergente ?

4) Calculer la valeur moyenne μ sur l'intevalle $[-1;1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

5) Dans chacun des cas suivants, μ désigne la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle I. Calculer l'intégrale indiquée :

   a) $\mu = 2\,;\ I = [1;4]\,;\ \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ b) $\mu = \ln 2\,;\ I = [1;3]\,;\ \displaystyle\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

   c) $\mu = \dfrac{2}{\pi}\,;\ I = \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right];\ f$ paire ; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$

6) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

   a) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

   b) La suite (I_n) est-elle convergente ?

7) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

   La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$

   a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge t-elle ?

Correction 1

1. Comparons $I = \int_1^2 xe^x\,dx$ et $J = \int_1^2 x^2e^x\,dx$

   – Méthode 1 : on forme $I - J$ et on étudie son signe :

$$\begin{aligned} I - J &= \int_1^2 xe^x\,dx - \int_1^2 x^2e^x\,dx \\ &= \int_1^2 xe^x - x^2e^x\,dx \\ &= \int_1^2 xe^x(1-x)\,dx \end{aligned}$$

   Pour tout réel $x \in [1;2]$ on a : $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ e^x > 0 \\ (1-x) < 0 \end{array}\right\}$ Par produit $xe^x(1-x) \leqslant 0$ En utilisant la croissance de l'intégrale, on a comme $1 < 2$, $\int_1^2 xe^x(1-x)\,dx \leqslant \int_1^2 0\,dx$

   Soit $\int_1^2 xe^x(1-x)\,dx \leqslant 0$ On a donc prouvé $I - J \leqslant 0$
   $I \leqslant J$

   – Méthode 2 : On compare les deux fonctions sous les intégrales et on utilise la croissance de l'intégrale.

Correction 2

2) a) Montrons que :

$$\frac{9}{4} \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant 9$$

① On encadre la fonction sous l'intégrale sur $[0;9]$

$\forall t \in [0;9]$

$$0 \leqslant t \leqslant 9$$

$$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{9}$$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

$$0 \leqslant \sqrt{t} \leqslant 3$$

$$1 \leqslant 1+\sqrt{t} \leqslant 4$$ en ajoutant 1

$$1 \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{4}$$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\searrow$ sur $]0;+\infty[$

donc $\forall t \in [0;9]$ $\quad \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{t}} \leqslant 1$

② D'après la croissance de l'intégrale, comme $0<9$ on a

$$\int_0^9 \frac{1}{4}\,dt \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant \int_0^9 1.\,dt$$

soit

$$\frac{9}{4} \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant 9$$

Correction 3

2) b) Montrons que $\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 3$

① On encadre la fonction sous l'intégrale :

$\forall x \in [1;2]$ on a : $1 \leqslant x \leqslant 2$

d'où $1^3 \leqslant x^3 \leqslant 2^3$ car $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

ainsi $1 \leqslant x^3 \leqslant 8$

puis $2 \leqslant 1+x^3 \leqslant 9$ en ajoutant 1.

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant \sqrt{9}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 3$

② On utilise la croissance de l'intégrale, comme $1 \leqslant 2$

$\forall t \in [1;2]$ $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 3$

d'où $\int_1^2 \sqrt{2}\,dx \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant \int_1^2 3\,dx$

soit $\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 3.$

Correction 4

2) c) Montrons que $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant 1$.

① $\forall t \in [0;1]$ on a $0 \leqslant t \leqslant 1$

d'où $0^3 \leqslant t^3 \leqslant 1^3$ car …

$0 \leqslant t^3 \leqslant 1$

puis $1 \leqslant 1+t^3 \leqslant 2$ en …. a)

ainsi $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t^3} \leqslant 1$ car ….. b)

② D'après la croissance de … c)

comme …. d)

on déduit de : $\forall t \in [0;1]$: $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t^3} \leqslant 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant \int_0^1 1\,dt$$

soit $\cancel{\int_0^1}$ $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant 1$

Correction 5

Ex 2 : 3) (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 (1+t^n)\,dt$.

a) Prouvons que (I_n) est décroissante.

On forme $I_{n+1} - I_n$ et on étudie son signe.

déjà $I_{n+1} = \int_0^1 (1+t^{n+1})\,dt$

d'où $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1+t^{n+1})\,dt - \int_0^1 (1+t^n)\,dt$

$$= \int_0^1 1+t^{n+1} - (1+t^n)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^{n+1} - t^n)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^n(t-1)\,dt$$

$\forall t \in [0;1]$: $\left.\begin{array}{l} t^n \geqslant 0 \\ t-1 \leqslant 0 \end{array}\right\}$

par produit on déduit $t^n(t-1) \leqslant 0$

$\forall t \in [0;1]$ $t^n(t-1) \leqslant 0$

d'après la croissance de l'intégrale, comme $0<1$

on déduit $\int_0^1 t^n(t-1)\,dt \leqslant \int_0^1 0\,dt$

soit $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$

La suite (I_n) est donc décroissante.

Ex3b) Est elle convergente ?

Il suffit, pour affirmer que (I_n) est convergente, de prouver que (I_n) est minorée.

Or $\forall t \in [0;1]$ $\quad t \geqslant 0$

d'où $t^n \geqslant 0$

$t^n + 1 \geqslant 0$

D'après la positivité de l'intégrale ; comme $0 < 1$

$$\int_0^1 (t^n+1)\,dt \geqslant 0$$

soit $I_n \geqslant 0$

(I_n) est décroissante minorée par 0,

donc (I_n) est convergente

Ex3 : Geogebra.

Conjecture de la limite

$$I_n - 1 = \int_0^1 (1+t^n)\,dt - 1$$

$$= \int_0^1 (1+t_n)\,dt - \int_0^1 1\,dt$$

$$= \int_0^1 t^n\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; on déduit

$$\lim_{n \to +\infty} I_n - 1 = 0$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 1.$

2. Cours du mercredi 18 mars

2.1. Exercice 1 donné pour le 18 mars

Exercice 1

Primitive et intégrale **(5 points)**

1) Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes sur l'intervalle I proposé. On indiquera clairement la forme utilisée pour déterminer la primitive.

   a) $f(x) = 3x - 1 - \dfrac{4}{(x+2)^2}$, $\mathrm{I} =]-2\,;+\infty[$

   b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

   c) $h(x) = (x-1)(x^2-2x-5)^2$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

2) a) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5(1 - e^{-\frac{1}{2}x})$

   b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 5(1 - e^{-\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x$

Le corrigé

Exercice 1

Primitive et intégrale **(5 points)**

1) a) $f(x) = 3x-1-\dfrac{4}{(x+2)^2} = 3x-1-4\times\dfrac{1}{(x+2)^2} = 3x-1-4\times\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = x+2$

$\displaystyle\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}$, on a alors $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x + \dfrac{4}{x+2}$

b) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2+1} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+1$,

$\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$ comme $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a alors $G(x) = \dfrac{3}{2}\ln(x^2+1)$

c) $h(x) = (x-1)(x^2-2x-5)^2 = \dfrac{1}{2}(2x-2)(x^2-2x-5) = \dfrac{1}{2}\times u'(x)u^2(x)$

avec $u(x) = x^2-2x-5$, $\displaystyle\int u'u^2 = \frac{1}{3}u^3$, on a alors, $H(x) = \dfrac{1}{6}(x^2-2x-5)^3$

2) a) $F(x) = 5(x + 2e^{-\frac{1}{2}x})$

b) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^2 5(1-e^{-\frac{1}{2}x})\,\mathrm{d}x = 5\left[x+2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2 = 5(2+2e^{-1}-0-2) = 10\,e^{-1} = \frac{10}{e}$

Exercice 2

Intégrale **(3 points)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - e^{2x}$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) \geqslant 0$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Le corrigé

Exercice 2

Intégrale **(3 points)**

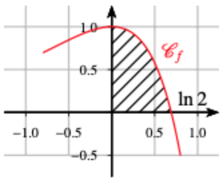
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2e^x - e^{2x}$

1) $f(x) \geqslant 0 \iff 2e^x - e^{2x} \geqslant 0 \iff 2e^x \geqslant e^{2x} \iff e^{\ln 2 + x} \geqslant e^{2x} \overset{\exp \nearrow}{\iff} x + \ln 2 \geqslant 2x$

$\iff -x \geqslant -\ln 2 \iff x \leqslant \ln 2 \iff S =]-\infty\ ;\ \ln 2]$.

2) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Comme sur $[0\ ;\ \ln 2]$, la fonction f est positive, cette intégrale représente l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite verticale $x = \ln 2$



2.2. Autres exercices

Exercice 3

Primitive

1) Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

a) $f(x) = \tan^2 x\,;\ F(x) = \tan x - x\,;\ I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) $f(x) = \dfrac{2(x^4-1}{x^3}\,;\ F(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\,;\ I =]0; +\infty[$

c) $f(x) = \cos x - x\sin x\,;\ F(x) = x\cos x\,;\ I = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}\,;\ F(x) = x - \ln(1+e^x)\,;\ I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}\,;\ F(x) = \ln(\ln x)\,;\ I =]1; +\infty[$

2) Montrer que les fonction F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I.

$$F(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}\,;\quad G(x) = \frac{x^2+7x-5}{x-1}\,;\quad I =]1; +\infty[.$$

Exercice 4

Calcul de primitive

Pour les exercices suivants, donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

Linéarité de la primitive

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3, \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3}, \quad I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1, \quad I =$

5) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1, \quad I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Forme u′uⁿ

6) $f(x) = (x+2)^3, \quad I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}, \quad I = \mathbb{R}$

8) $f(x) = 2(3x-1)^5, \quad I = \mathbb{R}$

9) $f(x) = 2x(1+x^2)^5, \quad I = \mathbb{R}$

10) $f(x) = \sin x \cos x, \quad I = \mathbb{R}$

Forme $\dfrac{\mathbf{u'}}{\mathbf{u}}$

11) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]4; +\infty[$

12) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}, \quad I =]-\infty; 4[$

13) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}, \quad I =]0; 1[$

Forme $\dfrac{\mathbf{u'}}{\mathbf{u^n}}$, $\mathbf{n \geqslant 2}$

14) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^3}, \quad I =]-4; +\infty[$

15) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}, \quad I = \left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right[$

16) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}, \quad I = \mathbb{R}$

17) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$, $I =]-1;3[$

18) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$, $I =]-2;+\infty[$

Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

19) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$, $I = \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

20) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $I =]1;+\infty[$

Forme $u'e^u$

21) $f(x) = e^{-x+1}$, $I = \mathbb{R}$

22) $f(x) = 2e^{3x-2}$, $I = \mathbb{R}$

23) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $I = \mathbb{R}$

24) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}$, $I = \mathbb{R}$

Forme $u(ax+b)$

25) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$

26) $f(x) = 3\cos x - 2\sin(2x) + 1$, $I = \mathbb{R}$

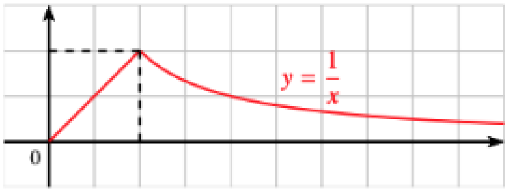
27) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 7

Calcul d'aire

La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous. Utiliser la relation de Chasles pour calculer les intégrales :

$$I = \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_2^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Exercice 8

Calcul d'intégrale par une décomposition

1) a) Trouver les réel a et b tels que, pour tout réels x de $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$, on a :

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 3}$$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_4^5 \frac{1}{x^2 - 9}\,\mathrm{d}x$

2) a) Trouver trois réel a, b et c tels que pour tout réel de $\mathbb{R} - \{-3\}$, on a :

$$\frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3} = ax + b + \frac{c}{x + 3}$$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_2^0 \frac{4x^2 - 5x + 1}{x + 3}\,\mathrm{d}x$

3) a) Prouver que pour tout réel x :

$$\frac{1}{1 + e^x} = 1 - \frac{e^x}{1 + e^x}$$

b) En déduire : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9

Calcul de primitives

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiquée.

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$ $I =]-\infty; 1[$

2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $I =]-\pi; 0]$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$ $I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = \sin x \cos x$ $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$

7) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $I =]0; +infty[$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $I =]1; +\infty[$

9) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $I = \mathbb{R}$

Exercice 10

Primitive d'une fonction rationnelle par décomposition

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décompostion proposée

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}$ $I =]1; +\infty[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-4}{x-2}$ $I =]2; +\infty[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+3}$

a) $I =]3; +\infty[$ b) $I =]-3; 3[$ c) $I =]-\infty; -3[$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$ $I =]1; +\infty[$. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$

Exercice 11

Intégration par partie

Calculer les intégales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

1) $I = \displaystyle\int_1^e x\ln x \,\mathrm{d}x$

2) $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \ln t \,\mathrm{d}t$

3) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (x-1)\cos x \,\mathrm{d}x$

4) $I = \displaystyle\int_0^1 (x+2)e^x \,\mathrm{d}x$

5) $I = \displaystyle\int_1^2 (t-2)e^{2t} \,\mathrm{d}t$

6) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \,\mathrm{d}x$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

3. Cours du 19 mars 2020 : Un exercice des annales

3.1. Un exercices des annales sur le calcul intégral : Le sujet

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
        U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
   Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
$-0,2$	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3 295
$-6\ 634$	29 654
$-66\ 341$	296 539
$-729\ 752$	3 261 928
$-8\ 757\ 025$	39 143 135
$-113\ 841\ 326$	508 860 754

   Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $F(x) = (-1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = \mathrm{e} - 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

   Utiliser cette formule pour calculer I_2.

4(a) Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n \mathrm{e}$.

(b) Justifier que : $\displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

(d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n\,!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par : $1\,!$=1

$2\,! = 2 \times 1$

et si $n \geqslant 3$: $n\,! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$

On a ainsi par exemple

$3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2\,!$

$4\,! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3\,!$

$8\,! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7\,!$

Et, plus généralement :

$$(n+1)\,! = (n+1) \times n\,!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n\,!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,! = +\infty$.

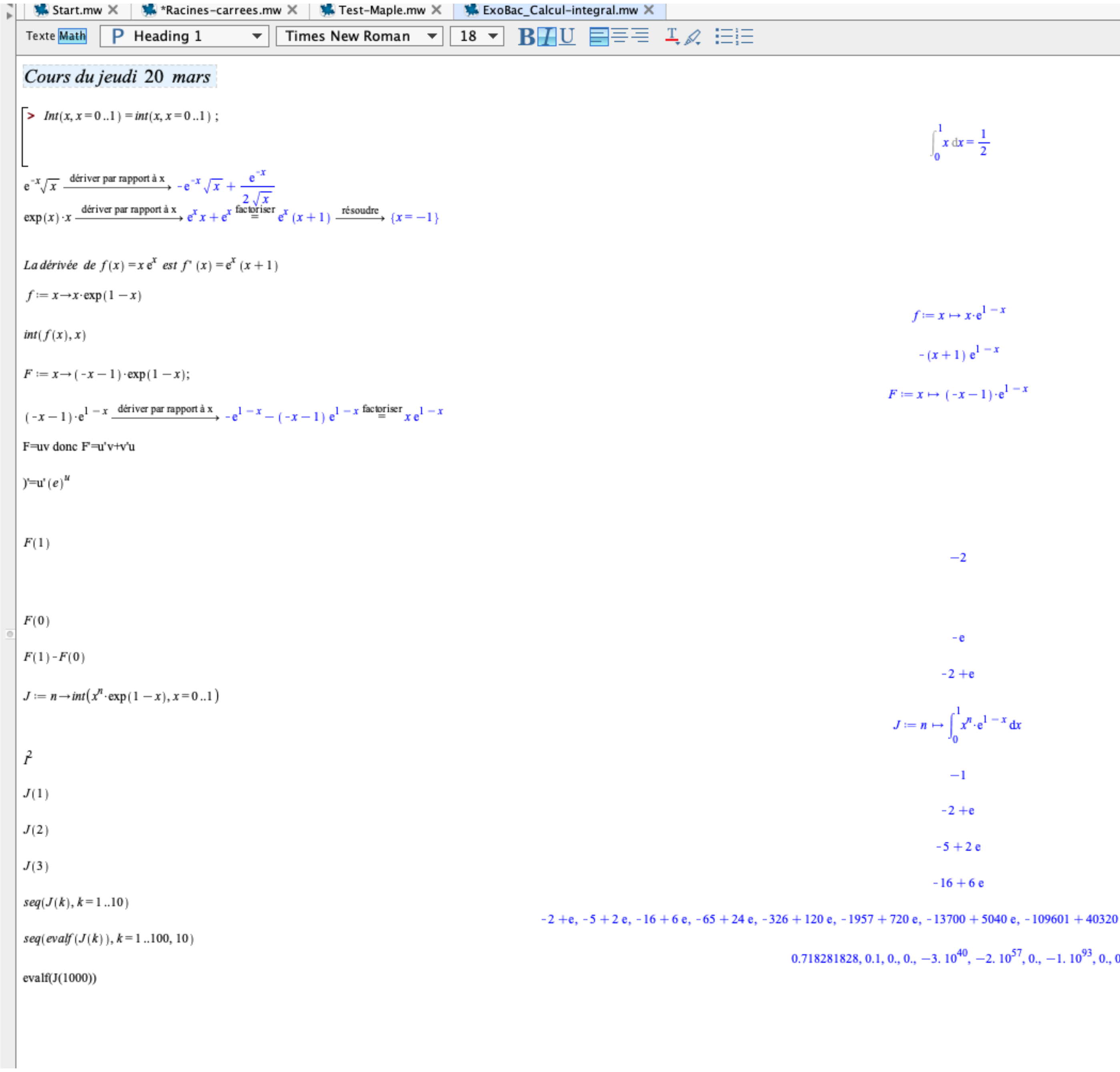
(a) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.

(b) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.

3.2. *Un exercice des annales sur le calcul intégral : Le corrigé*

`Le corrigé de cet exercice sur casedesmaths !`

3.3. Quelques calculs faits avec Maple pendant la visioconférence



4. Cours du lundi 23 mars

4.1. Un exercice des annales sur la fonction ln

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par

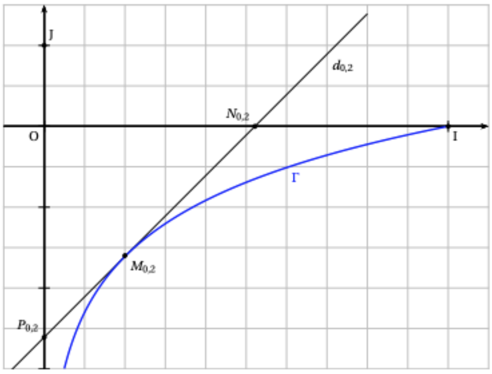
$$f(x) = x(1-\ln x)^2.$$

   (a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.
Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .
On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



   (a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.
   (b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.
   (c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.
   Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

2. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

4.2. *Le corrigé*

`Le corrigé de cet exercice sur casedesmaths !`

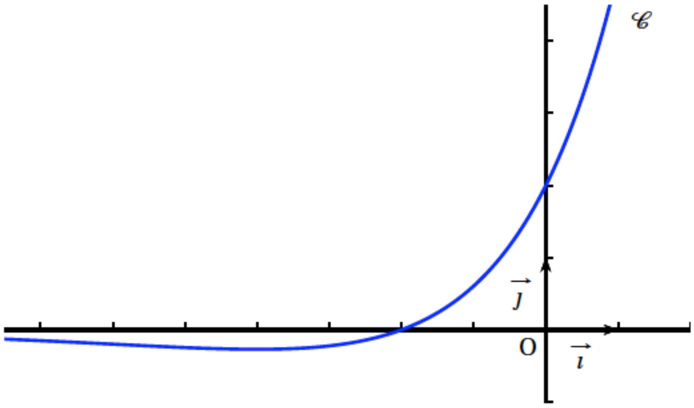
4.3. *Un exercice des annales sur calcul intégral et fonction exponentielle.*

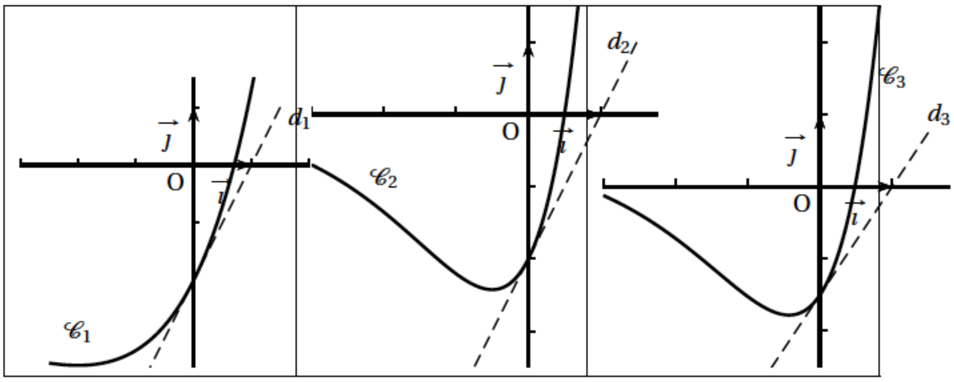
Exercice 1. Fonction exp et calcul intégral

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   (b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

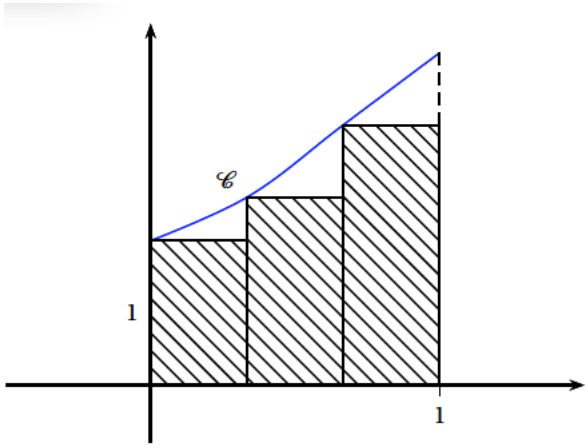
$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
   (a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   (b) En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Interpréter géométriquement le réel I.
   (b) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.
   (c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.
3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels.
	s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$
	| Affecter à s la valeur $s+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

(a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



(b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

4.4. Le corrigé

Le corrigé de cet exercice sur casedesmaths !

4.5. Cours : Applications du calcul intégral

Calculs d'aires

1. Cas d'une fonction positive :

Propri 1

Si f est une fonction positive sur $[\ a\ ;\ b\ ]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ exprimée en unité d'aire.

Exemple 1

Calcul de l'aire du domaine compris entre la courbe d'équation $\dfrac{1}{x}$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=4$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x}dx=[\ln(x)]_{\frac{1}{2}}^{4}=\ln 4-\ln\frac{1}{2}=\ln 4+\ln 2$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x}dx=\ln 8=3\ln 2 \text{ U.A. } \approx 2,08\text{ cm}^2.$$

Courbe |

2. Cas d'une fonction négative :

Propri 2

Si la fonction f est négative, alors la fonction $-f$ est positive et les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Dans ce cas, $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b [-f(x)]\ dx$.

Exemple 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{27} - \dfrac{x^2}{3}$.

f est négative sur l'intervalle $[\ 0\ ;\ 9\ ]$. Pour calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abcsisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 9$, il suffit de calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $-f$, l'axe des abcsisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 9$:

Graphique de f : |

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \int_0^9 [-f(x)]\ dx = \int_0^9 \left(-\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3}\right) dx = \left[-\frac{x^4}{108} + \frac{x^3}{9}\right]_1^9 = \frac{81}{4} \text{ U.A.}$$

.

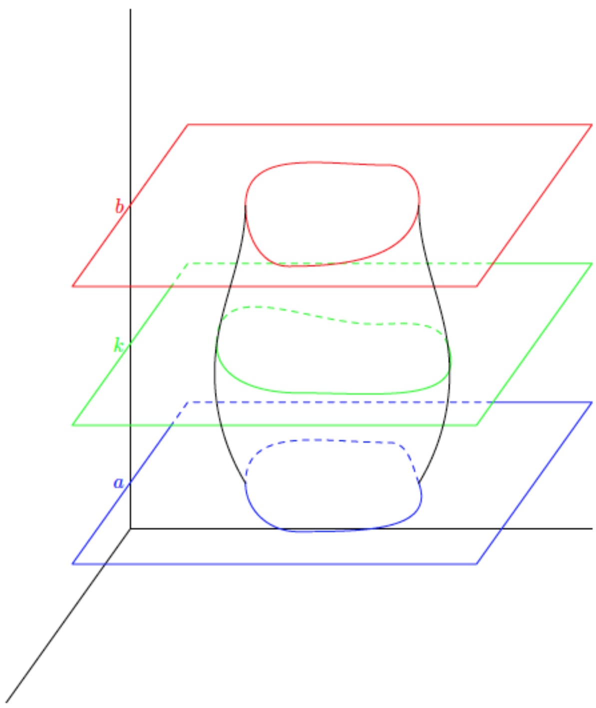
3. Aire entre deux courbes :

Calculs de volumes

Proposition 1

Un solide S est délimité par deux plans P_1 et P_2 d'équations respectives $z = a$ et $z = b$.
Si la section du solide S par le plan P d'équation $z = k$ où $k \in [a;b]$ (ce plan est parallèle à P_1 et P_2) est une surface d'aire $\mathcal{A}(k)$ alors le volume du solide S est donné par :

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(z)\mathrm{d}z$$



Exemple 3

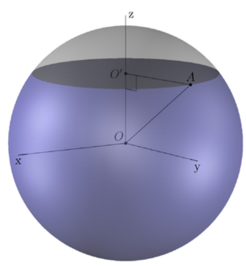
Calculer le volume d'une boule de rayon R à l'aide d'une intégrale.

On peut se contenter de calculer le volume d'une demi-boule posée sur le plan xOy. Pour $k \in [0;R]$ on a alors $\mathcal{A}(k) = \pi \times r^2$ où r est le rayon du disque obtenu par section de la boule par le plan d'équation $z = k$.

On a donc $r = O'A = \sqrt{R^2 - k^2}$ (théorème de Pythagore dans $OO'A$ rectangle en O' - voir figure ci-contre).

L'aire du disque est donc

$\mathcal{A}(k) = \pi(R^2 - k^2)$.



Finalement, le volume de la boule est donc :

$$\mathcal{V} = 2\int_0^R \mathcal{A}(z)\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^R (R^2 - z^2)\mathrm{d}z = 2\pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = 2\pi \times \left(\frac{2R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Distance parcourue (cinématique)

Nous avons vu en première que si on connaît la position d'un mobile à chaque instant, on est capable de déterminer sa vitesse instantanée à chaque moment (bien sûr, si la fonction définissant la position est dérivable sur l'intervalle étudié...). Grâce à la propriété suivante, on est capable du contraire : connaître la distance parcourue grâce à la donnée de la vitesse à chaque instant.

Proposition 2

Si la vitesse instantanée $V(t)$ d'un mobile est connue pour tout $t \in [a;b]$ alors la distance parcourue entre les instants $t = a$ et $t = b$ est égale à :

$$d = \int_a^b V(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 4

La vitesse d'un objet en chute libre (sans frottement) lâché sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ est donnée par $V(t) = \mathrm{g}t$.
La distance parcourue au cours de la troisième seconde de chute est donc :

$$d = \int_2^3 \mathrm{g}t\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\mathrm{g}t^2\right]_2^3 = \frac{1}{2}\mathrm{g}(9-4) \approx \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times 5 = 24{,}5 \text{ m}$$

CASE DES MATHS

Table des matières