Mathématiques en TS 2019 - 2020

Lycée l'Oiselet

TS4

Année Scolaire 2019 - 2020

Cours de Maths

Luc Giraud

Case des Maths

17 mars 2020

CASE DES MATHS

TD Calcul intégral

1. Avant propos

Une autre façon de travailler ...

2. Objectifs de la séance

Plan de la séance 1

1. Mettre en place une nouvelle méthode de travail
2. Apprendre à utiliser les propriétés du cours sur intégrales et inégalités

Exercice 2

Encadremment et valeur moyenne

1) Comparer, sans les calculer les réels I et J.

   a) $I = \displaystyle\int_1^2 x\,e^x\,\mathrm{d}x$ b) $J = \displaystyle\int_1^2 x^2\,e^x\,\mathrm{d}x$

2) Démontrer les encadrements suivants :

   a) $\dfrac{9}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant 9$

   b) $\sqrt{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x \leqslant 3$

   c) $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$

   d) $2e^{-4} \leqslant \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant 2$

   e) $2\ln 3 \leqslant \displaystyle\int_2^4 \ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\ln 3 + 2\ln 5$

3) La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 (1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

   a) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.

   b) Est-elle convergente ?

4) Calculer la valeur moyenne μ sur l'intevalle $[-1;1]$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

5) Dans chacun des cas suivants, μ désigne la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle I. Calculer l'intégrale indiquée :

   a) $\mu = 2\,;\ I = [1;4]\,;\ \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ b) $\mu = \ln 2\,;\ I = [1;3]\,;\ \displaystyle\int_3^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

   c) $\mu = \dfrac{2}{\pi}\,;\ I = \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]\,;\ f$ paire ; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$

6) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

   a) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

   b) La suite (I_n) est-elle convergente ?

7) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

   La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$

   a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   b) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{2}$. La suite (u_n) converge t-elle ?

Correction 1

1. Comparons $I = \int_1^2 xe^x\, dx$ et $J = \int_1^2 x^2e^x\, dx$

   – Méthode 1 : on forme $I - J$ et on étudie son signe :

$$\begin{aligned} I - J &= \int_1^2 xe^x\, dx - \int_1^2 x^2e^x\, dx \\ &= \int_1^2 xe^x - x^2e^x\, dx \\ &= \int_1^2 xe^x(1-x)\, dx \end{aligned}$$

   Pour tout réel $x \in [1;2]$ on a : $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ e^x > 0 \\ (1-x) < 0 \end{array}\right\}$ Par produit $xe^x(1-x) \leqslant 0$ En utilisant la croissance de l'intégrale, on a comme $1 < 2$, $\int_1^2 xe^x(1-x)\, dx \leqslant \int_1^2 0\, dx$
   Soit $\int_1^2 xe^x(1-x)\, dx \leqslant 0$ On a donc prouvé $I - J \leqslant 0$
   $I \leqslant J$

   – Méthode 2 : On compare les deux fonctions sous les intégrales et on utilise la croissance de l'intégrale.

Correction 2

2) a) Montrons que :

$$\frac{9}{4} \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant 9$$

① On encadre la fonction sous l'intégrale sur $[0;9]$

$\forall t \in [0;9]$

$$0 \leqslant t \leqslant 9$$

$$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{9}$$ car $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

$$0 \leqslant \sqrt{t} \leqslant 3$$

$$1 \leqslant 1+\sqrt{t} \leqslant 4$$ en ajoutant 1

$$1 \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{4}$$ car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\searrow$ sur $]0;+\infty[$

donc $\forall t \in [0;9]$

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{t}} \leqslant 1$$

② D'après la croissance de l'intégrale, comme $0 < 9$ on a

$$\int_0^9 \frac{1}{4}\,dt \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant \int_0^9 1.\,dt$$

soit

$$\frac{9}{4} \leqslant \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,dt \leqslant 9$$

Correction 3

2] b] Montrons que $\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 3$

① On encadre la fonction sous l'intégrale :

$\forall x \in [1;2]$ on a : $1 \leqslant x \leqslant 2$

d'où $1^3 \leqslant x^3 \leqslant 2^3$ car $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$

ainsi $1 \leqslant x^3 \leqslant 8$

puis $2 \leqslant 1+x^3 \leqslant 9$ en ajoutant 1.

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant \sqrt{9}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 3$

② On utilise la croissance de l'intégrale, comme $1 \leqslant 2$

$\forall t \in [1;2]$ $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 3$

d'où $\int_1^2 \sqrt{2}\,dx \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant \int_1^2 3\,dx$

soit $\sqrt{2} \leqslant \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 3$.

Correction 4

2) c) Montrons que $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant 1$.

① $\forall t \in [0;1]$ on a $0 \leqslant t \leqslant 1$

d'où $0^3 \leqslant t^3 \leqslant 1^3$ car ...

$0 \leqslant t^3 \leqslant 1$

puis $1 \leqslant 1+t^3 \leqslant 2$ en .... a)

ainsi $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t^3} \leqslant 1$ car ..... b)

② D'après la croissance de ... c)

comme .... d)

on déduit de : $\forall t \in [0;1]$: $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t^3} \leqslant 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant \int_0^1 1\,dt$$

soit $\cancel{\int_0^1}$ $\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,dt \leqslant 1$

Correction 5

Ex 2 : 3) (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 (1+t^n)\,dt$.

a) Prouvons que (I_n) est décroissante.

On forme $I_{n+1} - I_n$ et on étudie son signe.

déjà $I_{n+1} = \int_0^1 (1+t^{n+1})\,dt$

d'où
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1+t^{n+1})\,dt - \int_0^1 (1+t^n)\,dt$$
$$= \int_0^1 1+t^{n+1} - (1+t^n)\,dt$$
$$= \int_0^1 (t^{n+1} - t^n)\,dt$$
$$= \int_0^1 t^n(t-1)\,dt$$

$\forall t \in [0;1]$: $\left.\begin{array}{l} t^n \geqslant 0 \\ t-1 \leqslant 0 \end{array}\right\}$

par produit on déduit $t^n(t-1) \leqslant 0$

$\forall t \in [0;1]$ $t^n(t-1) \leqslant 0$

d'après la croissance de l'intégrale, comme $0<1$

on déduit $\int_0^1 t^n(t-1)\,dt \leqslant \int_0^1 0\,dt$

soit $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$

La suite (I_n) est donc décroissante.

Ex3b) Est elle convergente ?

Il suffit, pour affirmer que (I_n) est convergente, de prouver que (I_n) est minorée.

Or $\forall t \in [0;1]$ $\quad t \geqslant 0$

d'où $t^n \geqslant 0$

$t^n + 1 \geqslant 0$

D'après la positivité de l'intégrale ; comme $0 < 1$

$$\int_0^1 (t^n + 1)\,dt \geqslant 0$$

soit $I_n \geqslant 0$

(I_n) est décroissante minorée par 0,

donc (I_n) est convergente

Ex3 : Geogebra.

Conjecture de la limite

$$I_n - 1 = \int_0^1 (1+t^n)\,dt - 1$$

$$= \int_0^1 (1+t_n)\,dt - \int_0^1 1\,dt$$

$$= \int_0^1 t^n\,dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} I_n - 1 = 0$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1.$