Nom :	**DS 05** CASE DES MATHS	TS — Janv.2020
Prénom :		Devoir n° 10 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Application du cours — 6,5 points

1 pt **1** Ecrire sous la forme algébrique : $z = \dfrac{7+4i}{3-2i}$

$$\begin{aligned} z &= \frac{7+4i}{3-2i} \\ &= \frac{(7+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} \\ &= \frac{21+14i+12i-8}{3^2+2^2} \\ &= \frac{13+26i}{13} \\ &= 1+2i \end{aligned}$$

$$\boxed{z = \frac{7+4i}{3-2i} = 1+2i}$$

2 Soit l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$: $z^3+4z^2+2z-28=0$

0.5 pt **a.** Montrer que 2 est solution de l'équation (E).
$2^3+4\times2^2+2\times2-28 = 8+16+4-28 = 0$

$\boxed{\text{Ainsi 2 est solution de l'équation (E).}}$

1 pt **b.** Montrer que l'on peut mettre l'équation (E) sous la forme : $(z-2)(z^2+6z+14)=0$
On développe !

$$\begin{aligned} (z-2)(z^2+6z+14) &= z^3+6z^2+14z-2z^2-12z-28 \\ &= z^3+4z^2+2z-28 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{on peut mettre l'équation (E) sous la forme : } (z-2)(z^2+6z+14)=0}$

1.5 pt **c.** Résoudre alors l'équation (E).

$$\begin{aligned} z^3+4z^2+2z-28=0 &\iff (z-2)(z^2+6z+14)=0 \\ &\iff z-2=0 \text{ ou } (z^2+6z+14)=0 \\ &\iff z=2 \text{ ou } (z^2+6z+14)=0 \end{aligned}$$

On résout $z^2+6z+14=0$.
$\Delta = 36-4\times14 = -20$.
$\Delta<0$, donc l'équation a deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} & z_4 &= \overline{z_3} \\ &= \frac{-6+i\sqrt{20}}{2} & &= \frac{-6-i\sqrt{20}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{(E) a trois solutions } \mathcal{S} = \{2; \frac{-6+i\sqrt{20}}{2}; \frac{-6-i\sqrt{20}}{2}\}}$$

3 On donne le nombre complexe : $Z = \left(-\sqrt{3}+i\right)^{2019}$

1.5 pt **a.** Donner la forme trigonométrique et exponentielle du nombre $-\sqrt{3}+i$.

Module	**Argument**
$\begin{aligned} \lvert z\rvert &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$ convient

$$z = \sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

1 pt **b.** Montrer que le nombre Z est un imaginaire pur.
Z est un imaginaire pur ssi arg(Z)= $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \arg(Z) &= \arg\left(\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2019}\right) \\ &= 2019\arg\left(\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\right) \\ &= 2019\times\frac{5\pi}{6} \\ &= 1682,5\pi \\ &= 841\times 2\pi+\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \text{ , ce qui prouve que } Z \text{ est un imaginaire pur.}}$$

Exercice 2 — *3 points*

Déterminer et représenter les ensembles des point Md'affixe z dans les cas suivants : On prendra comme unité 2 cm sur les deux axes du plan complexe $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1.5 pt **1** $|z-1| = |z-i|$

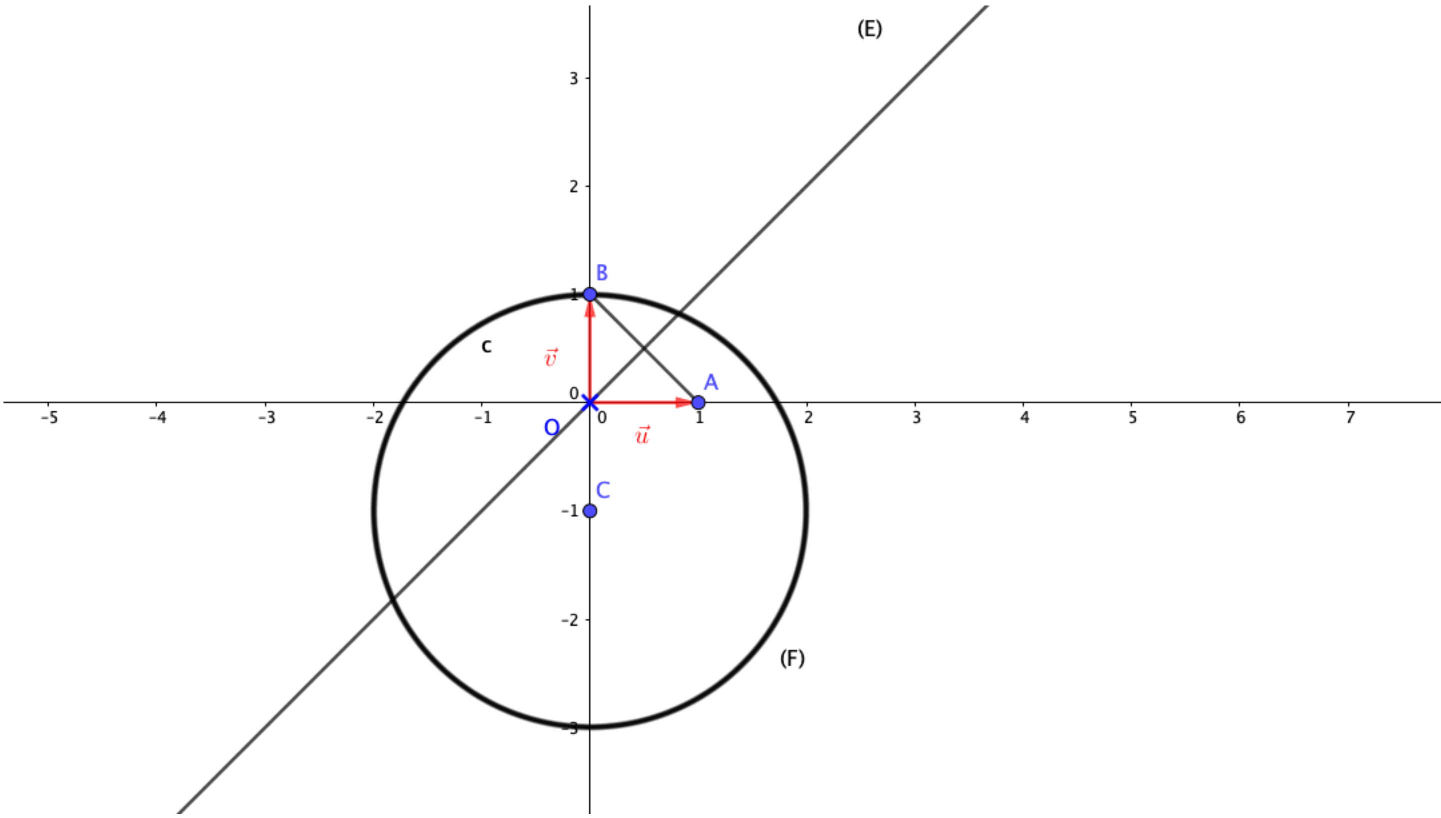
$$\begin{aligned} M\in(E) &\iff |z-1| = |z-i| \\ &\iff |z_M-z_A| = |z_M-z_B| \text{ où } M(z), A(1) \text{ et } B(i) \\ &\iff AM = BM \\ &\iff M \text{ est équidistant de } A \text{ et} B \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble (E) des points M (z) vérifiant } |z-1| = |z-i| \text{ est la médiatrice de } [AB] \text{ où A(1) et B(i).}}$$

1.5 pt **2** $|z+i| = 2$

$$\begin{aligned} M\in(F) &\iff |z+i| = 2 \\ &\iff |z-(-i)| = 2 \\ &\iff |z_M-C| = 2 \text{ où } M(z) \text{ et } C(-i) \\ &\iff CM = 2 \\ &\iff M \text{ est sur le cercle de centre C de rayon 2} \end{aligned}$$

L'ensemble (F) des points M (z) vérifiant $|z+i| = 2$ est le cercle de centre C(-i) de rayon 2.



Exercice 3 — 5 points

Soit l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

1 pt **1** Montrer que : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

$$\begin{aligned}(z^2+z-2)(z^2+z+1) &= z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2\\ &= z^4 + 2z^3 - z - 2\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

2 pts **2** Résoudre alors l'équation (E).

$$\begin{aligned}z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 &\iff (z^2+z-2)(z^2+z+1) = 0\\ &\iff (z^2+z-2) = 0 \text{ ou } (z^2+z+1) = 0\end{aligned}$$

- Résolution de $z^2 + z - 2 = 0$
  $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$.

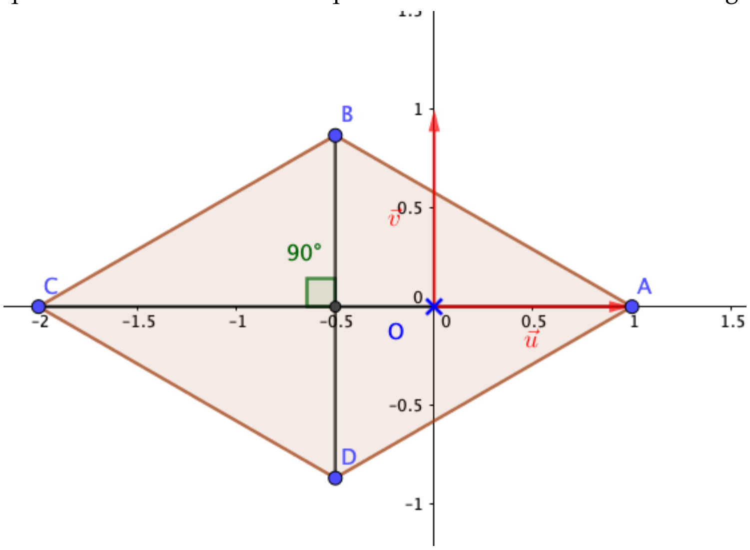
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2} = 1 \qquad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

- Résolution de $z^2 + z + 1 = 0$
  $\Delta = 1 - 4 = -3$.

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} & z_4 &= \overline{z_3} \\ &= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & &= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 & &= -2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'équation (E) a quatre solutions : } -2; 1; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2 pts **3** Les solutions de l'équation (E) sont les affixes des points A, B, C, D du plan complexe tels que $ABCD$ soit un quadrilatère non croisé. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.



Un losange est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires.

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2 - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$, donc ABCD est un parallélogramme.
- $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -2 - 1 = -3$
  $z_{\overrightarrow{BD}} = z_D - z_B = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -i\sqrt{3}$
  $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$
  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = XX' + YY' = -3 \times 0 + (-\sqrt{3}) \times 0 = 0$
  Ce qui prouve que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ainsi $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

$$\boxed{\text{Le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires. C'est un losange.}}$$

Exercice 4 — 5 points

On définit la suite de nombres complexes (z_n) : $z_0 = 1$et, $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1.5 pt **1** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.
Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} - i \\ &= \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i - i \\ &= \frac{1}{3}z_n - \frac{1}{3}i \\ &= \frac{1}{3}(z_n - i) \\ &= \frac{1}{3}u_n \end{aligned}$$

Ayant pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$, la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

1 pt **2** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-i)$.

Comme la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, on a $u_n = q^n \times u_0$.
$u_0 = z_0 - i = 1 - i$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1-i)$$

1.5 pt **3** **a.** Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n (1-i)\right| \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n |(1-i)| \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

0.5 pt **b.** Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} |z_n - i| = 0$

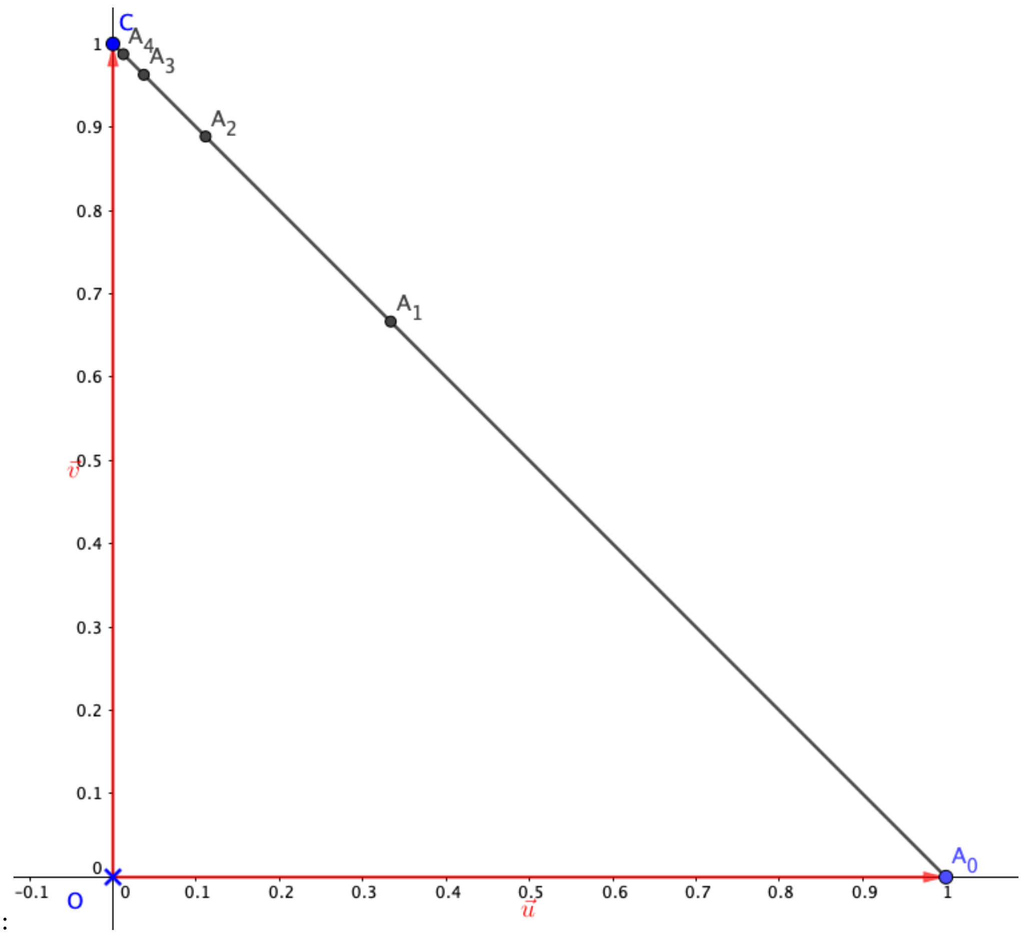
Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on déduit $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$,

ainsi $\lim_{n\to+\infty} |z_n - i| = 0$

0.5 pt **c.** Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?
$|z_n - i| = \left|z_{A_n} - z_C\right| = CA_n$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} |z_n - i| = 0$, on déduit $\lim_{n\to+\infty} CA_n = 0$.

La suite de points A_n se rapproche du point C.

Une figure non demandée :



Exercice 5 — 8,5 points

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Une entreprise fabrique des ordinateurs utilisant de très nombreux composants électroniques. Lors d'un retour au service après-vente, on s'aperçoit qu'un composant pose problème. Si le défaut est décelé avant la sortie de l'usine, le composant sera changé. Sinon, l'ordinateur sera endommagé à la première utilisation et non réparable. Il sera alors repris par le service après-vente et détruit. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'ordinateurs dont 1% comporte le composant défectueux.
On obtient les résultats suivants :

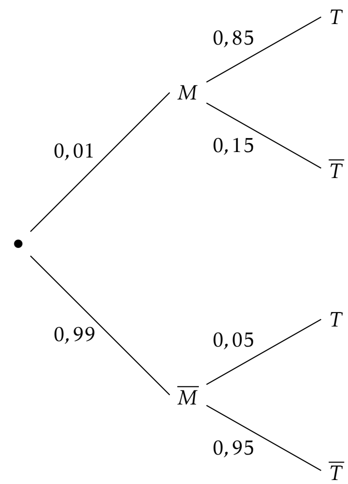
- si un ordinateur comporte le composant défectueux, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un ordinateur ne comporte pas le composant défectueux, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la production entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la présence du composant défectueux.
On note :

M l'évènement : « l'ordinateur comporte le composant défectueux » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1 pt **1** Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2 Un ordinateur est choisi au hasard.

1 pt **a.** Quelle est la probabilité pour qu'il comporte le composant le composant défectueux et que son test soit positif ?
On veut ici calculer la probabilité :

$$\begin{aligned} p(M \cap T) &= p(M) \times p_M(T) \\ &= 0,01 \times 0,85 \\ &= 0,0085 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un ordinateur comporte le composant défectueux et que son test soit positif } p(M \cap T) = 0,0085}$

1.5 pt **b.** Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est $0,058$.
On utilise la partition $M, \overline{M}$, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) \\ &= p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05 \\ &= 0,0085 + 0,0495 \\ &= 0,058 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité de choisir un ordinateur ayant un test positif est égale à } 0,058}$

1.5 pt **3** Un ordinateur est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il comporte le composant défectueux ?
On veut ici calculer la probabilité conditionnelle : $p_T(M)$:

$$\begin{aligned} p_T(M) &= \frac{p(T \cap M)}{p(T)} \\ &= \frac{0,01 \times 0,85}{0,058} \\ &\approx 0,1466 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un ordinateur comporte le composant défectueux sachant qu' il a eu un test positif est } p_T(M) \approx 0,1466}$

4 On choisit cinq ordinateurs au hasard. Le nombre d'ordinateurs fabriqués permet de considérer les épreuves indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq ordinateurs choisis, associe le nombre d'ordinateurs comportant le composant défectueux.

1.5 pt **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
On répète 5 fois, de façon indépendante,l'expérience « On choisit au hasard un ordinateur dans cette production » qui comporte 2 issues :

- « l'ordinateur est défectueux » considéré comme succès, de probabilité $p = 0,01$
- « l'ordinateur n'est pas défectueux » considéré comme échec, de probabilité $q = 1 - p = 0,99$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,01$ notée $\mathscr{B}(5; 0,01)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 5$, on a

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \times (0,01)^k \times (0,99)^{5-k}$$

1 pt **b.** Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq ordinateurs ait un test positif ?
Attention, il faut mettre en place un autre modèle !
On répète 5 fois, de façon indépendante,l'expérience « On choisit au hasard un ordinateur dans cette production » qui comporte 2 issues :

- « l'ordinateur a un test positif » considéré comme succès, de probabilité $p = 0,0058$
- « l'ordinateur n'a pas un test positif » considéré comme échec, de probabilité $q = 1 - p = 0,942$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,058$ notée $\mathscr{B}(5;0,058)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 5$, on a

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \times (0,058)^k \times (0,942)^{5-k}$$

On veut ici calculer la probabilité $p(Y \geq 1) = 1 - p\left(\overline{Y \geq 1}\right) = 1 - p\,(Y = 0)$

[2nd] [DISTR] [A] [binomFdp(] [5] [,] [0.058] [,] [0] [)]

$binomFdp(5, 0.058, 0) \approx 0.7417$ Ceci calcule $P(Y = 0)$ dans le cas où Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 0, 058)$

$$\boxed{\text{La probabilité pour qu'au moins un des cinq ordinateurs ait un test positif est } p(Y \geq 1) \approx 0,2583}$$

1 pt **c.** Calculer $P(2 \leq X \leq 5)$.

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \\ &= \text{ BinomFRép } (5, 0.058, 5) - \text{ BinomFRép } (5, 0.058, 1) \\ &\approx 1 - 0,970 \\ &\approx 0,030 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(2 \leq X \leq 5) \approx 0,030.}$$