Nom :	DS 03	TS — Nov.2019
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 08 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — 2 points

2 pts

Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^3 \qquad B = \frac{(\mathrm{e}^2)^4}{\mathrm{e}^3} \qquad C = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^2 \qquad D = \frac{(\mathrm{e}^x)^2 \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}}$$

Exercice 2 — 4 points

Résoudre les équations suivantes :
On pourra poser $X = e^x$ pour la (1) et la (3).

1.5 pt **1** $2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 1 = 0$

1 pt **2** $\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}^x = 0$

1.5 pt **3** $\mathrm{e}^x + 12\mathrm{e}^{-x} + 7 = 0$

Exercice 3 — 4,5 points

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition :

1.5 pt **1** f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$

1.5 pt **2** f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \mathrm{e}^x - x$

1.5 pt **3** f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$

Exercice 4 — 4 points

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal.

1 pt **1** Déterminer l'équation de $\mathcal{D}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2 On veut prouver que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{D}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

2 pts **a.** Etudier les variations de ϕ sur $\mathbb{R}$.

1 pt **b.** En déduire pour conclure l'inégalité suivante (à retenir) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geq x + 1$$

Exercice 5 — 6,5 points

2.5 pts **1** Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

2 pts **2** Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

1 pt Démontrer que α appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

1 pt **3** Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 6 : Bonus — 2 points

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

1 pt **1** $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$

1 pt **2** $g(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$

1 pt **3** $h(x) = \dfrac{3e^x}{e^x+2}$