Nom :	**DS 03** CASE DES MATHS	TS Nov.2019
Prénom :		Devoir n° 08 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — *3 points*

3 pts Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = e^2 \times e^3 \qquad B = \frac{(e2)^4}{e^3} \qquad C = \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 \qquad D = \frac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{-x}}$$

Exercice 2 — *11,5 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x} - 2x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

1 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

2.5 pts **a.** Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.

0.5 pt **b.** Montrer que, pour tout réel x, $(e^{2x} - 2x)$ est strictement positif.

2 pts **2** **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

1 pt **b.** Interpréter graphiquement les résultats précédents.

1.5 pt **3** **a.** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

1 pt **b.** Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

1 pt **c.** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

2 pts **d.** Etudier la position relative de C_f par rapport à T.

Exercice 3 — *6,5 points*

3 pts **1** Résoudre dans $\mathbb{R}$, lorsque c'est possible, les équations suivantes :

a. $e^{2x-2} = e$ **b.** $e^{x^2-6x-7} = e^0$ **c.** $e^{3x+2} = -e$

2 pts **2** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$. *(on pourra utiliser le changement de variable $X = e^x$)*

1.5 pt **3** Calculer la dérivée de la fonction g définie par : $x \longmapsto (x^2 - 3x - 2)e^{-2x}$

Exercice 4 — 5 points

2 pts **1** Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

2 pts **2** Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Démontrer que α appartient à l'intervalle $[0{,}703\ ;\ 0{,}704[$.

1 pt **3** Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.