Nom :	**DS**	TS 2017	Nov. 2016
Prénom :		Devoir n° 03	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 — 3 points

3 pts Ecrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = e^2 \times e^3 \qquad B = \frac{(e^2)^4}{e^3} \qquad C = \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 \qquad D = \frac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{-x}}$$

$$A = e^2 \times e^3 = e^5 \qquad B = \frac{(e^2)^4}{e^3} = \frac{e^8}{e^3} = e^5 \qquad C = \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 = \left(e^{-x}\right)^2 = e^{-2x}$$

$$D = \frac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{-x}} = \frac{(e^{2x}) \times e^x}{e^{-x}} = \frac{e^{3x}}{e^{-x}} = e^{4x}$$

Exercice 2 — 11,5 points

2.5 pts **1** **a.**

$g = u + v$ est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, $g'(x) = 2e^{2x} - 2$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff e^{2x} = 1 \\ &\iff e^{2x} = e^0 \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff e^{2x} > 1 \\ &\iff e^{2x} > e^0 \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations de g sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	
Signe de $g(x)$		$+$	0	$+$	

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$
On déduit du tableau de variation que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$; en effet g présente un minimum en 0 qui vaut 0.

0.5 pt **b.** D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0 \iff e^{2x} - 2x - 1 \geq 0 \iff e^{2x} - 2x \geq 1 > 0$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} - 2x > 0$. Ceci nous permet de justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

3 pts **2** a), b) En $+\infty$: $f(x)=\dfrac{x}{e^{2x}\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)}=\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0\end{array}\right\}\quad \text{Par compposée } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x}}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0\end{array}\right\}\quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$$

la droite $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; on factorise donc par x dans $f(x)$: $f(x)=\dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{2x}}{x}-2\right)}$,

On écrit $\dfrac{e^{2x}}{x}=e^{2x}\times\dfrac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}=0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}-2=-2\text{, d'où, } \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}\text{ : la droite d'équation}$$

$y=-\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

1.5 pt **3** **a.** f est le quotient des fonctions $u : x\mapsto x$ et $v : x\mapsto e^{2x}-2x$ dérivables sur $\mathbb{R}$, et dont le dénominateur $v(x)=e^{2x}-2x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'après la question b). f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases}u(x)&=x\\ v(x)&=e^{2x}-2x\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases}u'(x)&=1\\ v'(x)&=2e^{2x}-2\end{cases}$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1(e^{2x}-2x)-(2e^{2x}-2)\times x}{(e^{2x}-2x)^2}\\ &=\frac{e^{2x}-2x-2xe^{2x}+2x}{(e^{2x}-2x)^2}\\ &=\frac{e^{2x}-2xe^{2x}}{(e^{2x}-2x)^2}\\ &=\frac{e^{2x}(1-2x)}{(e^{2x}-2x)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}(1-2x)}{(e^{2x}-2x)^2}}$$

1 pt **b.** On peut alors étudier le signe de la dérivée à l'aide d'un tableau de signes.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de e^{2x}		$+$		$+$	
signe de $1-2x$		$+$	0	$-$	
signe de $(e^{2x}-2x)^2$		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2(e-1)}$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{e-1}$

1 pt **c.** (T) a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, avec $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$, d'où l'équation, $(T) : y = x$.

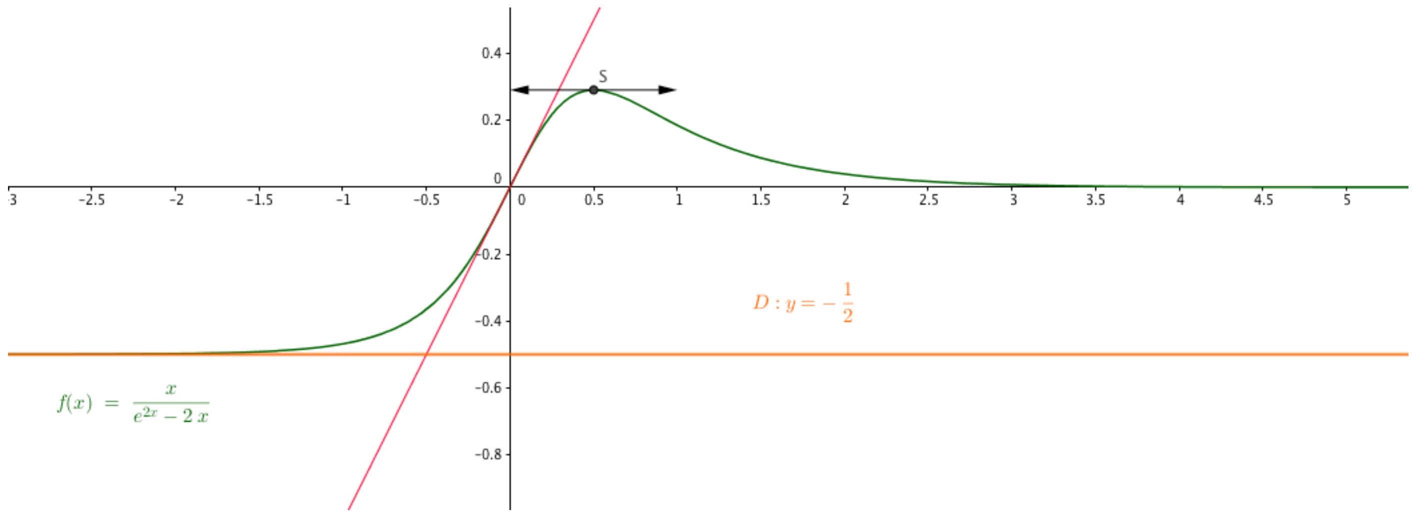
2 pts **d.**

On forme $y_C - y_T = f(x) - x = \frac{x}{e^{2x}-2x} - x$ et on étudie son signe.

$$\begin{aligned}
y_C - y_T &= f(x) - x \\
&= \tfrac{x}{e^{2x}-2x} - x \\
&= x\left(\frac{1}{e^{2x}-2x} - 1\right) \\
&= x\left(\frac{1}{e^{2x}-2x} - \frac{e^{2x}-2x}{e^{2x}-2x}\right) \\
&= x\left(\frac{1-(e^{2x}-2x)}{e^{2x}-2x}\right) \\
&= x\left(\frac{1+2x-e^{2x}}{e^{2x}-2x}\right) \\
&= x\left(\frac{-g(x)}{e^{2x}-2x}\right)
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$	
signe de $-g(x)$		$-$	0	$-$	
signe de $e^{2x}-2x$		$+$		$+$	
signe de $y_C - y_T$		$+$	0	$-$	
Position relative		C_f au -dessus de T	C_f et T ont un point commun	C_f en-dessous de T	

Une représentation graphique de f non demandée :



Exercice 3 — 6,5 points

1 Un résultat de cours à connaître : $e^a = e^b \iff a = b$

1 pt **a.** $e^{2x-2} = e \iff 2x - 2 = 1 \iff x = \frac{3}{2}$

1 pt **b.** $e^{x^2-6x-7} = e^0 \iff x^2 - 6x - 7 = 0$
Cette dernière expression est un trinôme du second degré. $a = 1$ et $\Delta = 64 = 8^2$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 7$. Ce sont les solutions de notre équation.

1 pt **c.** $e^{3x+2} = -e$. Une exponentielle est toujours positive donc cette équation n'a pas de solution.

2 pts **2** Soit $X = e^x$, alors $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \iff X^2 - 2X - 3 = 0$. Cette équation du second degré admet deux solutions réelles $X_1 = -1$ et $X_2 = 3$.
On revient ensuite à l'inconnue x :

- $e^x = X_1 = -1$ n'a pas de solution, une exponentielle étant toujours strictement positive ;
- $e^x = X_2 = 3 \iff x = \ln 3$.

L'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ a donc comme unique solution rélle $x = \ln 3$.

1.5 pt **3** Calculer la dérivée de la fonction g définie par : $x \longmapsto (x^2 - 3x - 2)e^{-2x}$

fonction	dérivée
$u : x^2 - 3x - 2$	$u' : 2x - 3$
$v : e^w$	$v' : w'e^w$
$w : -2x$	$w' : -2$

Par conséquent :
$g'(x) = (2x-3)e^{-2x} + (x^2 - 3x - 2)(-2x)e^{-2x}$
$g'(x) = (-2x^2 + 8x + 1)e^{-2x}$

Exercice 4 — 5 points

2 pts **1** Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{array}$$

$$g'(x) = 2xe^x + e^x \times x^2 = e^x\left(2x + x^2\right) = x(x+2)e^x$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, et par ailleurs on travaille sur $[0;+\infty[$, donc $x \geq 0$,

d'où on déduit $x+2 \geq 2 > 0$
$g'(x)$ a donc le signe de x.
$g'(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$.
La fonction g est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.
On déduit le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
Variations de g	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0^2 e^0 - 1 = -1$

2 pts **2** Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0~;~+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

En appliquant le théorème de la bijection sur $[0;+\infty[$:

- g est continue sur $I = [0;+\infty[$ (elle est dérivable sur I) ;
- g est strictement croissante sur I ;
- $g(0) = -1$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

donc g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$. Comme $0 \in [-1;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans I

$$\boxed{\text{Ainsi l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } I}$$

$g(0,703) \approx -0,0019$ et $g(0,704) \approx 0,002$
Ainsi $g(0,703) < g(\alpha) < g(0,704)$, comme g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$; on déduit : $0,703 \leqslant \alpha \leqslant 0,704$

$$\boxed{0,703 < \alpha < 0,704}$$

1 pt **3** Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		-	0	$+$	