Nom :	**DS 03**	TS — Nov.2019
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 08 — .../...

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises**.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — 2 points

2 pts

Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^3 \qquad B = \frac{(\mathrm{e}^2)^4}{\mathrm{e}^3} \qquad C = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^2 \qquad D = \frac{(\mathrm{e}^x)^2 \times \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}}$$

$$A = e^2 \times e^3 = e^5 \qquad B = \frac{(e^2)^4}{e^3} = \frac{e^8}{e^3} = e^5 \qquad C = \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 = \left(e^{-x}\right)^2 = e^{-2x}$$

$$D = \frac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{-x}} = \frac{(e^{2x}) \times e^x}{e^{-x}} = \frac{e^{3x}}{e^{-x}} = e^{4x}$$

$$\boxed{A = e^5, B = e^5, C = e^{-2x} \text{ et } D = e^{4x}}$$

Exercice 2 — 4 points

4 pts Résoudre les équations suivantes qui se ramènent à des équations du second degré.
On pourra poser $X = e^x$

$$2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 1 = 0 \tag{1}$$
$$\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}^x = 0 \tag{2}$$
$$\mathrm{e}^x + 12\mathrm{e}^{-x} + 7 = 0 \tag{3}$$

- $2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 1 = 0$
  On pose $X = e^x$; $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0 \iff 2X^2 - 3X + 1 = 0$
  $X_1 = 1$ est racine évidente, le produit des racines donne $X_1 \times X_2 = \frac{c}{a}$
  Ainsi $1 \times X_2 = \frac{1}{2} \iff X_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0 &\iff 2X^2 - 3X + 1 = 0 \\
&\iff X = 1 \text{ ou } X = \frac{1}{2} \\
&\iff e^x = 1 \text{ ou } e^x = \frac{1}{2} \\
&\iff e^x = e^0 \text{ ou } e^x = \frac{1}{2} \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0 ; \ln\left(\frac{1}{2}\right)\}}$$

- $$\begin{aligned} e^{2x+1} - e^x = 0 &\iff e^{2x+1} = e^x \\ &\iff 2x+1 = x \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1\}}$$

- $$\begin{aligned} e^x + 12e^{-x} + 7 = 0 &\iff e^x \times (e^x + 12e^{-x} + 7) = 0 && \text{en multipliant par } e^x > 0 \\ &\iff e^{2x} + 12e^0 + 7e^x = 0 \\ &\iff e^{2x} + 7e^x + 12 = 0 \\ &\iff X^2 + 7X + 12 = 0 && \text{en posant } X = e^x \\ &\iff X = -4 \text{ ou } X = -3 \\ &\iff e^x = -4 \text{ ou } e^x = -3 \end{aligned}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}; e^x$; donc l'équation $e^x + 12e^{-x} + 7 = 0$ n'a pas de solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

Exercice 3 — 0 point

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer les limites de la fonction aux bornes de son domaine de définition :

1 f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

- En $+\infty$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$
-
- En $-\infty$
  $f(x) = \dfrac{x}{e^x} = x \times \dfrac{1}{e^x}$
  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

2 f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = e^x - x$

- En $+\infty$
  $f(x) = e^x - x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$
  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty \text{ limite de référence } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to+\infty} e^x - x = +\infty$$
- En $-\infty$
  $f(x) = e^x - x$
  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$$

3 f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

- En $+\infty$
  $$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^x}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$
  D'après un théorème du cours, pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$,

en particulier pour $n = 2$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- En $-\infty$

$f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1} = e^x \times \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Exercice 4 — 0 point

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal.

1 Déterminer l'équation de $\mathcal{D}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

$\mathcal{D}$ a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

✏ $f'(0) = 1$

✏ $f(0) = 1$

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ a pour équation } y = 1(x-0)+1, \text{ soit } y = x+1}$$

2 On veut prouver que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{D}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

a. Etudier les variations de ϕ sur $\mathbb{R}$.
$D_\phi = \mathbb{R}$;
ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Dérivée : $\phi'(x) = e^x - 1$
Signe de la dérivée :
$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
$\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'où le tableau de variation de ϕ sur $\mathbb{R}$:
On déduit le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de ϕ	↘		0		↗

b. En déduire pour conclure l'inégalité suivante (à retenir) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geq x+1$$

D'après cette étude φ présente un minimum absolu sur $\mathbb{R}$ en 0 qui vaut 0 ;
donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\phi(x) \geq 0$.
soit pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x - x - 1 \geq 0$.

Exercice 5 — 0 point

1 Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g = uv - 1 \text{ donc } g' = u'v + v'u$$

Pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$:

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x & v'(x) = e^x \end{array}$$

$$g'(x) = 2xe^x + e^x \times x^2 = e^x\left(2x + x^2\right) = x(x+2)e^x$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, et par ailleurs on travaille sur $[0;+\infty[$, donc $x \geq 0$, d'où on déduit $x + 2 \geq 2 > 0$
$g'(x)$ a donc le signe de x.
$g'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.
La fonction g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2 Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $[0 ; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Démontrer que α appartient à l'intervalle $[0{,}703 ; 0{,}704[$.
On dresse le tableau de variations de g sur $[0 ; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
Variations de f	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection :

- g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [0 ; +\infty[$.
- g est strictement croissante sur l' intervalle $I = [0 ; +\infty[$.
- $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- g réalise donc une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $[-1;+\infty[$
  Comme $0 \in [-1;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ a une racine unique α dans $[0;+\infty[$.

- $g(0{,}703) \approx -0{,}0019$ et $g(0{,}704) \approx 0{,}002$
- ainsi $g(0{,}703) < 0 < g(0{,}704)$
  soit $g(0{,}703) < g(\alpha) < g(0{,}704)$
  donc puisque g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$$\boxed{0{,}703 < \alpha < 0{,}704}$$

3 Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
Variations de g			0		
Signe de $g(x)$		-	0	$+$	

Exercice 6 : Bonus — 3 points

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

1 pt **1** $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x}} = 3 \times \dfrac{1}{1+e^{-2x}}$

Comme $f = 3 \times \dfrac{1}{u}$, d'où $f' = 3 \times \left(-\dfrac{u'}{u^2}\right)$,

ici $u(x) = 1 + e^{-2x}$, donc $u'(x) = -2e^{-2x}$

$$\boxed{f'(x) = 3 \times \left(-\frac{-2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}\right) = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}}$$

1 pt **2** $g(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$

$g = u - 3vw$, donc $g' = u' - 3(v'w + w')$

$$\begin{cases} v x) &= x \\ w(x) &= e^{-x^2} \end{cases} \quad \text{ainsi : } \begin{cases} v'(x) &= 1 \\ v'(x) &= -2xe^{-x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - 3\left(1 \times e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \times x\right) \\ &= 1 - 3\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) \\ &= 1 - 3e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = 1 - 3e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)}$$

1 pt **3** $h(x) = \dfrac{3e^x}{e^x + 2}$

h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$h = \dfrac{u}{v}$ d'où $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 3e^x \\ v(x) &= e^x + 2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3e^x \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3e^x \times (e^x + 2) - e^x \times (3e^x)}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{3e^x \times (e^x + 2 - e^x)}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{6e^x}{(e^x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{6e^x}{(e^x+2)^2}}$$