Nom : .... Prénom :	**DS 02**	TS — Oct.2019 Devoir n° 08 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — 4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x - 6$.

1 pt **1** Etudier les variations de f .

2 pts **2** En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

1 pt **3** Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. On détaillera la démarche.

Exercice 2 — 5 points

5 pts Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 - 4n\sqrt{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2-5n}{2-5n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\times\left(\frac{3}{5}\right)^n - 5}{7\times\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} \qquad \lim_{n\to+\infty} 5^n - 4^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

Exercice 3 — 7,5 points

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

1.5 pt **1** Calculer u_2, u_3 et u_4.

2 pts **2** Montrer par récurrence que, pour tout $n > 1$, $\quad u_n < 2$.
1 pt En déduire que la suite (u_n) est croissante.

1 pt **3** On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

1 pt **4** Expliciter v_n, puis u_n en fonction de n.

1 pt **5** Déterminer la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 — 9,5 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $N-1$
| Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
Fin pour

Sortie
Afficher U

1 pt Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1 pt **1** Calculer u_1 et u_2.

2 pts **2** **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

0.5 pt **b.** En déduire la limite de la suite (u_n).

1 pt **3** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4 Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

1 pt **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

1 pt **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

5 Soit p un entier naturel non nul.
On admet qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant 10^p$.

1 pt **a.** A l'aide de votre calculatrice, calculer les premiers termes de la suite (u_n) et trouver le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant 10^3$.

1 pt **b.** Proposer un algorithme qui affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^9$.

Exercice 5 : Bonus — 3 points

3 pts On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation explicite :

$$u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n-1}$$

1 Déterminer les trois premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.

2 Établir l'encadrement suivant :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{3n-1}{2n-1} \leq u_n \leq \dfrac{3n+1}{2n-1}$

3 En déduire la valeur de convergence de $\left(u_n\right)$.