

Nom : Prénom :	DS 02 CASE DES MATHS	TS 01/10/2019 Oct.2019 <i>Devoir n° 08</i> .../...
-------------------------------	--	--

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
 Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.



Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).



Exercice 1

0 point

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x - 6$.

- 1** Etudier les variations de f .
- 2** En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
- 3** Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. On détaillera la démarche.



Exercice 2

0 point

Trois des limites demandées étaient des formes indéterminées, il fallait donc transformer leur expression.

- Pour tout entier naturel n non nul on peut écrire :

$$n^2 - 4n\sqrt{n} = n^2 \left(1 - 4 \frac{\sqrt{n}}{n} \right) = n^2 \left(1 - 4 \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 4 \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 4n\sqrt{n} = +\infty$$

- Pour tout entier naturel n non nul on peut écrire :

$$\frac{2n^2 - 5n}{2 - 5n^2} = \frac{n^2 \left(2 - \frac{5}{n} \right)}{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - 5 \right)} = \frac{2 - \frac{5}{n}}{\frac{2}{n^2} - 5}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{n}}{\frac{2}{n^2} - 5} = \frac{2}{-5}$.

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 5n}{2 - 5n^2} = -\frac{2}{5}$$

- Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n = 0$, comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$,
 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n - 5 = -5$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 = 3$.
 On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 5}{7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = -\frac{5}{3}$$

- Pour tout entier naturel n non nul on peut écrire :

$$5^n - 3^n = 5^n \left(1 - \frac{3^n}{5^n}\right) = 5^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{4}{5} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1$ et comme $3 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.
On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n - 4^n = +\infty$$

- Pour tout entier naturel n non nul on peut écrire :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin(n) \leq 1 \\ -\frac{1}{n} &\leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

Exercice 3

0 point

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

- 1** Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

$$\textcircled{p} u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{p} u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$\textcircled{p} u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 1 = \frac{7}{8} + 1 = \frac{15}{8}$$

- 2** Montrer par récurrence que, pour tout $n > 1$, $u_n < 2$.

On note $D(n)$ la propriété $u_n < 2$

⇒ Initialisation : $u_2 = \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{4} = \frac{24}{2} < 2$ donc $D(2)$ est vraie.

⇒ Hérédité : Soit $p \geq 2$, on suppose que : $D(p)$ est vraie $u_p < 2$ (HR) On doit prouver que : $D(p+1) : u_{p+1} < 2$

Or $u_{p+1} = \frac{1}{2}u_p + 1$ En partant de (HR) $u_p < 2$

On multiplie par $\frac{1}{2} > 0$, ainsi $\frac{1}{2}u_p < 1$

en ajoutant 1 ; $\frac{1}{2}u_p + 1 < 2$

soit $u_{p+1} < 2$

⇒ Conclusion : Le principe de récurrence s'appliquant, on a pour tout entier $n \geq 2$; $u_n < 2$

En déduire que la suite (u_n) est croissante.

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1 = \frac{2 - u_n}{2}$

D'après la question précédente $\forall n > 1$ on a $u_n < 2$, donc $2 - u_n > 0$, ainsi $\frac{2 - u_n}{2} > 0$

Ceci montre que la suite (u_n) est strictement croissante au moins à partir du rang 2. On voit sans difficulté $u_0 < u_1 < u_2$, ce qui prouve que (u_n) est strictement croissante.

3 On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$

Ayant pour tout entier naturel n ; $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, on a prouvé que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_1 = u_1 - 2 = 1 - 2 = -1$.

4 Expliciter v_n , puis u_n en fonction de n .

Comme (v_n) est géométrique, on a, d'après le cours $v_n = q^n \times v_0 = q^{n-1} \times v_1$

Ici $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times (-1)$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; puis de $v_n = u_n - 2$ on déduit $u_n = v_n + 2 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

5 Déterminer la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Ayant $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$



Exercice 4

0 point

Partie A

En faisant fonctionner, l'algorithme à la main, on obtient successivement :

$U_0 = 0$

Premier passage dans la boucle : $k = 0$

$U_1 = 3 \times U_0 - 2 \times k + 3 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$

Deuxième passage dans la boucle : $k = 1$

$U_2 = 3 \times U_1 - 2 \times k + 3 = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$

Troisième passage dans la boucle : $k = 2$

$U_3 = 3 \times U_2 - 2 \times k + 3 = 3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

Donc en sortie, U contient la valeur 29. L'algorithme affiche donc 29

On peut aussi le programmer sa calculatrice. Sur une TI82, TI83 ou TI84 cela donne :

```
PROMPT N
0→U
FOR(K,0,N-1)
3*U-2K+3→U
END
DISP U
```

Il suffit de lancer le programme, de donner la valeur 3 à N. il affiche alors 29. Si on veut les différentes valeurs de U, il suffit d'ajouter «DISP U» dans la boucle.

Partie B

1 u_1 et u_2 ont été calculés dans la partie A

$$u_1 = 3 \quad \text{et} \quad u_2 = 10$$

- 2 Soit n un entier naturel quelconque, on considère la propriété $u_n \geq n$, montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation

$u_0 = 0$ on a donc $u_0 \geq 0$

La propriété est vraie au rang le plus bas

Hérédité

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier naturel n et sous cette hypothèse montrons que qu'elle est aussi vraie pour l'entier naturel $n + 1$:

$$\begin{array}{ll} u_n \geq n & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ 3u_n \geq 3n & \\ 3u_n - 2n + 3 \geq n + 3 & \\ u_{n+1} \geq n + 1 & \text{car } n + 3 \geq n + 1 \end{array}$$

La propriété se transmet d'un rang au suivant, elle est donc héréditaire.

Conclusion

La propriété est vraie pour $n = 0$, elle est héréditaire donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout entier naturel n .

- 3 Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$$

Or $u_n \geq n$ donc $u_n - n \geq 0$ d'où $2(u_n - n) + 3 \geq 0$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc positive, par conséquent la suite (u_n) est croissante.

- 4 a. Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) + 1 \\ &= 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 \\ &= 3u_n - 3n + 3 \\ &= 3(u_n - n + 1) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

- b. Pour tout entier naturel n , on a : $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$
d'autre part, $v_n = u_n - n + 1$ donc $u_n = v_n + n - 1$ et par conséquent $u_n = 3^n + n - 1$.

- 5 a. En utilisant la table de la calculatrice, après avoir entré la fonction « $Y1 = 3^X + X - 1$ » on obtient :

X	Y1
6	734
7	2193

On remarque que u_n dépasse 10^3 à partir de $n = 7$, l'entier n_0 vaut donc 7.

- b. Algorithme

```
Variables
p est un réel
n est un entier naturel
Entrée U prend la valeur 0
n prend la valeur 0
Tant que U < 10^9 faire
    n prend la valeur n + 1
    U prend la valeur 3^n + n - 1
Fin tant_que
Afficher n
```

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par la relation explicite :

$$u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n - 1}$$

1 Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n) .

Voici les trois premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = \frac{3 \times 0 + (-1)^0}{2 \times 0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$
- $u_1 = \frac{3 \times 1 + (-1)^1}{2 \times 1 - 1} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$
- $u_2 = \frac{3 \times 2 + (-1)^2}{2 \times 2 - 1} = \frac{6 + 1}{4 - 1} = \frac{7}{3}$

2 Établir l'encadrement suivant :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{3n-1}{2n-1} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$

On a les encadrements suivants pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$3n - 1 \leq 3n + (-1)^n \leq 3n + 1$$

$2n - 1$ est positif pour tout entier naturel n non-nul :

$$\frac{3n-1}{2n-1} \leq \frac{3n+(-1)^n}{2n-1} \leq \frac{3n+1}{2n-1}$$

On a la transformation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{3n-1}{2n-1} &= \frac{n \cdot \left(3 - \frac{1}{n}\right)}{n \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

On a la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$

Par la même démarche, on en déduit la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{2n-1} = \frac{3}{2}$

3 En déduire la valeur de convergence de (u_n) .

De l'encadrement obtenu à la question 2) et des deux limites précédentes, le théorème des gendarmes permet d'obtenir la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

1

2

3