Lycée l'Oiselet **Février 2020**

BACCALAURÉAT BLANC 2020 DE MATHÉMATIQUES – SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

---

*Sont autorisées les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « **mode examen** » ou les calculatrices de type collège.*
Le mode examen ne devra être activé par le candidat qu'une fois entré en salle et sur instruction du surveillant de salle.
Le candidat doit traiter les cinq exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : Sciences Physiques , SVT, ISN ou Sciences de l'Ingénieur.*
- *votre classe : Terminale S1 ou Terminale S2 ou …*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages.

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1

Commun à tous les candidats **5 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
   A-t-il raison ?

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   a. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires dans un sachet. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
   c. Calculer $P(10 \leq X \leq 15)$.
2. **Bonus**
   Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Exercice 2

Commun à tous les candidats **5 points**

1 On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+8\mathrm{i}=0 \quad (E).$$

a. Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

b. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+8\mathrm{i}=(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right).$$

c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2 On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

a. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

b. Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.

c. On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3 On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

a. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overline{z}z'$ est un imaginaire pur.

b. À l'aide de la question **3. a.**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

Exercice 3

Commun à tous les candidats **1 point**

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcr} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n-5. \end{array}\right.$$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n=u_n-5.$$

1 **Affirmation A :** La suite (t_n) est une suite géométrique.

2 **Affirmation B :** Pour tout entier naturel n,

$$u_n=9\times 2^n+5.$$

Exercice 4

Commun à tous les candidats **4 points**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5\ \mu$g/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minutes) écoulé après le début d'une hémorragie.

1 **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
On pourra utiliser l'écriture : $f(t) = -12 \times \left(-\frac{1}{4}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2$
Interpréter ce résultat.

2 On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4 - t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$

3 **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4 Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0 ; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4 ; +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.
On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

5 Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

Exercice 5

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n).$$

   b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Annexe de l'exercice 5 à rendre avec la copie
Prénom, Nom et Classe :