Lycée l'Oiselet **Février 2020**

BACCALAURÉAT BLANC 2020 DE MATHÉMATIQUES – SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Exercice 1

Commun à tous les candidats **5 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1 Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

On a $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$
Donc $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588$.

$$\boxed{P(A \cap V) = 0,588}$$

2 Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(A \cap V) + P(B \cap V) \\ 0,96 &= 0,588 + P(B \cap V) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(B \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372.}$$

3 Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison ?

On veut calculer $P(_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{P\left(\overline{V}\right)}$.

On sait que $P\left(\overline{V}\right) = 1 - P(V) = 0,04$.

Puisque $P(V \cap B) = 0,372$ et $P(B) = 0,4$ alors $P_B(V) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$.

Ainsi $P_B\left(\overline{V}\right) = 1 - 0,93 = 0,07$.
Donc $P\left(\overline{V} \cap B\right) = P_B\left(\overline{V}\right) \times P(B) = 0,07 \times 0,4 = 0,028$.

Par conséquent $P(_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0,028}{0,04} = 0,7$.

$$\boxed{\text{Le technicien a donc raison}}$$

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1 Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires dans un sachet. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. l y a 40 tirages aléatoires, indépendants avec remise.

A chaque tirage, il y a deux issues N «La bille tirée est noire » et $\overline{N}$.

De plus $P(N) = \dfrac{1}{5} = 0,2$ (il y a équiprobabilité des couleurs lors de la teinte).

$\boxed{\text{Donc } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 40 \text{ et } p = 0,2.}$

b. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Ainsi $P(X = 10) = \dbinom{40}{10} \times 0,2^{10} \times 0,8^{30} \approx 0,107$.

2nd DISTR A binomFdp(40 , 0.2 , 10)

$binomFdp(40, 0.2, 10) \approx 0.107$ Ceci calcule $P(X = 10)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40, 0.2)$)

c. Calculer $P(10 \leq X \leq 15)$.

On remarque que :

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 15) &= P(X \leq 15) - P(X \leq 9) \\ &\approx 0,997 - 0,732 \\ &\approx 0,265 \end{aligned}$$

2nd DISTR B binomFRép(40 , 0.2 , 15)

binomFRép$(40, 0.2, 15) \approx 0,997$ Ceci calcule $P(X \leq 15)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.2)$

$\boxed{P(10 \leq X \leq 15) \approx 0,265}$

2 **Bonus**

Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

On appelle X' la variable aléatoire comptant le nombre billes noires parmi n boules tirées.

Pour les mêmes raisons qu'à la question B.1.a X' suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

On veut obtenir :

$$\begin{aligned} P(X' \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - P(X' = 0) \geqslant 0,99 \\ &\iff -P(X' = 0) \geqslant -0,01 \\ &\iff P(X' = 0) \leqslant 0,01 \\ &\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \\ \\ &\iff n \ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \\ &\iff n \geqslant 21 \end{aligned}$$

Il faut donc que les sachets contiennent au moins 21 billes pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans le sachet soit supérieure à 0,99.

Exercice 2

Commun à tous les candidats **5 points**

1 On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

a. Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i} = 0 \quad (E).$$

$(-2\mathrm{i})^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) \times (-2\mathrm{i})^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) \times (-2\mathrm{i}) + 8\mathrm{i}$
$= 8\mathrm{i} + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) \times (-4) + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) \times (-2\mathrm{i}) + 8\mathrm{i}$
$= 8\mathrm{i} + 8\sqrt{3} - 8\mathrm{i} - 8\mathrm{i} - 8\sqrt{3} + 8\mathrm{i} = \boxed{0}$.

$-2\mathrm{i}$ est donc bien une solution de l'équation (E).

b. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i} = (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right) &= z^3 - 2\sqrt{3}z^2 + 4z + 2\mathrm{i}z^2 - 4\sqrt{3}\mathrm{i}z + 8\mathrm{i}\\ &= z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i}\end{aligned}$$

Donc : $z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right)z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z + 8\mathrm{i} = (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right)$.

c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un l'un des facteurs est nul.
On a :

- $z + 2\mathrm{i} = 0$ donc $z_1 = -2\mathrm{i}$
- $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
  $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées.
  $z_2 = \dfrac{2\sqrt{3} - (2\mathrm{i})}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_3 = \overline{z_2} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

L'ensemble des solutions de (E) est : $\boxed{\mathcal{S} = \{-2\mathrm{i}\ ;\ \sqrt{3} - \mathrm{i}\ ;\ \sqrt{3} + \mathrm{i}\}}$.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2 On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

a. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
On a $|z_1| = 2$; $|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $|z_3| = |\overline{z_2}| = 2$ donc $\boxed{OA = OB = OC = 2}$.

A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b. Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.
Voir la figure en fin d'exercice.

c. On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_L du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

$$\begin{aligned}\text{AODL est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DL}\\ &\iff z_A - z_O = z_L - z_D\\ &\iff z_L = z_A + z_D\end{aligned}$$

Or D est le milieu de [OB] ; donc $z_D = \frac{1}{2}(z_O + z_B) = \frac{1}{2}z_B$

Ainsi $z_L = z_A + z_D = z_A + \dfrac{1}{2}z_B = -2\mathrm{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}}$.

$$\boxed{z_L = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}}$$

3 On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

a. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

$z\overline{z'} = (x + \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = xx' + yy' + \mathrm{i}(x'y - xy')$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff xx' + yy' = 0 \\ &\iff \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = 0 \\ &\iff z\overline{z'} \text{est un imaginaire pur.} \end{aligned}$$

b. À l'aide de la question **3. a.**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OL}$ est $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

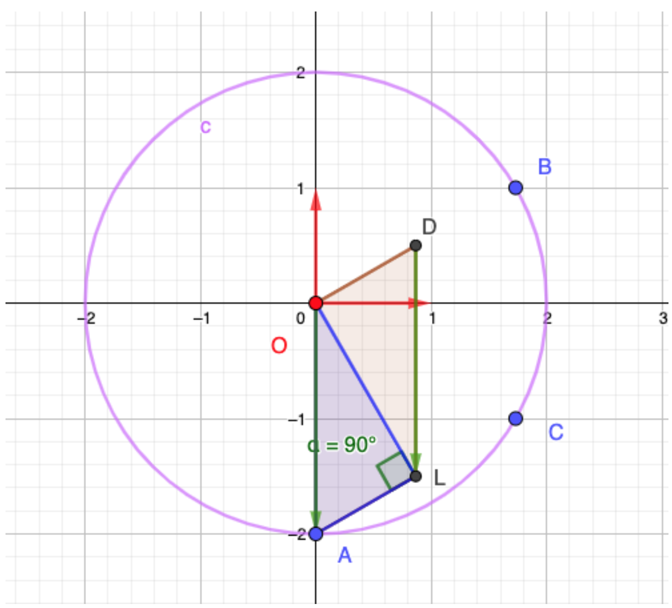
Celle du vecteur $\overrightarrow{AL}$ est $z' = z_L - z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Alors : $z\overline{z'} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - \dfrac{3}{4} = -\sqrt{3}\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AL}$ donc donc orthogonaux ;

$$\boxed{\text{le triangle AOL est bien } \textbf{rectangle} \text{ en L.}}$$

Figure :



Exercice 3

Commun à tous les candidats **1 point**

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcr} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{array}\right.$$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

1 **Affirmation A :** La suite (t_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 2u_n - 5 - 5 \\ &= 2\left(u_n - 5\right) \\ &= 2t_n \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = 2t_n$

La suite (t_n) est une suite géométrique de raison 2. L'affirmation A est vraie.

2 **Affirmation B :** Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

Comme $t_n = u_n - 5$, on déduit $u_n = t_n + 5$.
La suite (t_n) est une suite géométrique de raison 2, donc $t_n = q^n \times t_0 = 2^n \times (u_0 - 5) = 9 \times 2^n$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$. L'affirmation B est vraie.

Exercice 4

Commun à tous les candidats **4 points**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5\ \mu$g/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minutes) écoulé après le début d'une hémorragie.

1 **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

On a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0} = 1$, donc $f(0) = 3\times 0\times 1 + 2 = 0 + 2 = 2$.

$$\boxed{\text{Le taux de vasopressine dans le sang à l'instant } t = 0 \text{ est de } 2\ \mu\text{g/mL.}}$$

b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

On a $12 \text{ s} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ (min).

On calcule $f(0,2) = 3\times 0,2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0,2} + 2 = 0,6\mathrm{e}^{-0,05} + 2 \approx 2 + 0,57 \approx 2,57$.

$$\boxed{\text{Ce taux est supérieur à 2,5, donc anormal.}}$$

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

On écrit $f(t) = -12\times\left(-\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right) + 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}t\right) = -\infty\\ \lim\limits_{T\to-\infty} T\exp(T) = 0 \text{ Limite de référence}\end{array}\right\} \text{ par composée } \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} = 0 \text{, donc finalement :}$$

$$\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2. \text{ Cela signifie qu'à terme le taux de vasopressine va se stabiliser à } 2\ \mu\text{g/mL.}}$$

2 On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$

f somme et produit de fonctions dérivable sur $[0 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et

$f = uv+2$, d'où $f' = u'v+v'u$ avec pour tout réel t, dans $[0 ; +\infty[$: $\left\{\begin{array}{ll} u(t) & = 3t\\ v(t) & = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(t) & = 3\\ v'(t) & = -\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\end{array}\right.$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 3t\times\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(3 - \frac{3}{4}t\right)\\ &= 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(1 - \frac{1}{4}t\right)\\ &= \frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}}$$

3 **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

On sait que quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} > 0$; le signe de $f'(t)$ est donc celui de $4-t$:

- $4-t>0 \iff 4>t$;
- $4-t>0 \iff 4<t$;
- $4-t=0 \iff 4=t$.

Conclusion : la fonction f est

- croissante sur $[0 ; 4]$ de $f(0)=2$ à $f(4)=3\times 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 4}+2=2+12\mathrm{e}^{-1}\approx 6,41$;
- décroissante sur $[4\ ;\ +\infty[$ de $f(4)\approx 6,41$ à $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=2$

On déduit le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	2	$\nearrow$	$2+12\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	2

b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?

La fonction étant croissante sur $[0 ; 4]$ de $f(0)=2$ à $f(4)\approx 6,41$ puis décroissante sur $[4\ ;\ +\infty[$, $f(4)=2+12\mathrm{e}^{-1}\approx 6,41$ est le maximum de la fonction sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Le taux de vasopressine est maximal au bout de 4 minutes. Le maximum de ce taux est environ $6,41\ \mu\mathrm{g/mL}$.

4 Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0 ; 4]$ telle que $f(t_0)=2,5$.

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I=[0\ ;\ 4]$.
- ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $I=[0\ ;\ 4]$.
- ✍ $f(0)=2$ et $f(4)=2+12\mathrm{e}^{-1}$
- ✍ f réalise donc une bijection de $[0;2]$ sur $\left[2;2+12\mathrm{e}^{-1}\right]$
  $2,5$ est compris entre $f(0)$ et $f(2)$, en effet $f(0)<2,5$ et $f(4)>2,5$
  donc l'équation $f(t)=2,5$ a une racine unique α dans $[0\ ;\ 4]$.

La calculatrice donne :
$f(0)=2$ et $f(1)\approx 4,33$, donc $0<t_0<1$;
$f(0,1)\approx 2,29$ et $f(0,2)\approx 2,57$, donc $0,1<t_0<0,2$;
$f(0,17)\approx 2,49$ et $f(0,18)\approx 2,52$, donc $0,17<t_0<0,18$;
$f(0,174)\approx 2,499$ et $f(0,175)\approx 2,503$, donc $0,174<t_0<0,175$.

$0,174$ est donc une valeur approchée de t_0.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\ ;\ +\infty[$ vérifiant $f(t_1)=2,5$.
On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1\approx 18,930$.

5 Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

Sur l'intervalle $[t_0\,;\,4]$, la fonction f est croissante, donc sur cet intervalle $f(t) \geqslant f(t_0) = 2,5$ et sur l'intervalle $[4\,;\,t_1]$ la fonction est décroissante donc sur cet intervalle
$f(t) \geqslant f(t_1) = 2,5$.
On a donc $f(t) > 2,5$ sur l'intervalle $]t_0\,;\,t_1[$ ce qui signifie que :

le taux de vasopressine sera anormal pendant $t_1 - t_0 \approx 18,93 - 0,175$ soit environ 18,755 min soit 18 min 45 s.

Exercice 5

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1 Calculer u_1.

$u_1 = f(u_0) = \dfrac{2+9}{4+3} = \dfrac{11}{7}$.

$$\boxed{u_1 = \frac{11}{7}.}$$

2 Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;\,4]$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{3(4+x) - 1(2+3x)}{(4+x)^2} = \dfrac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \dfrac{10}{(4+x)^2}$

Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0\,;\,4]$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,4]$.

3 Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

Démonstration par récurrence :

Initialisation

On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité

Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\ 1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,4]$, on $f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 3$,
$1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $k+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque k il est vrai au rang suivant $k+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n, $\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.

4 **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.

b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$

c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

On en déduit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell^2+\ell-2=0$.
Or $\Delta = 1+4\times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :
$\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
Comme $u_n \in [1\,;\,3]$ on déduit par passage à la limite $\ell \in [1\,;\,3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

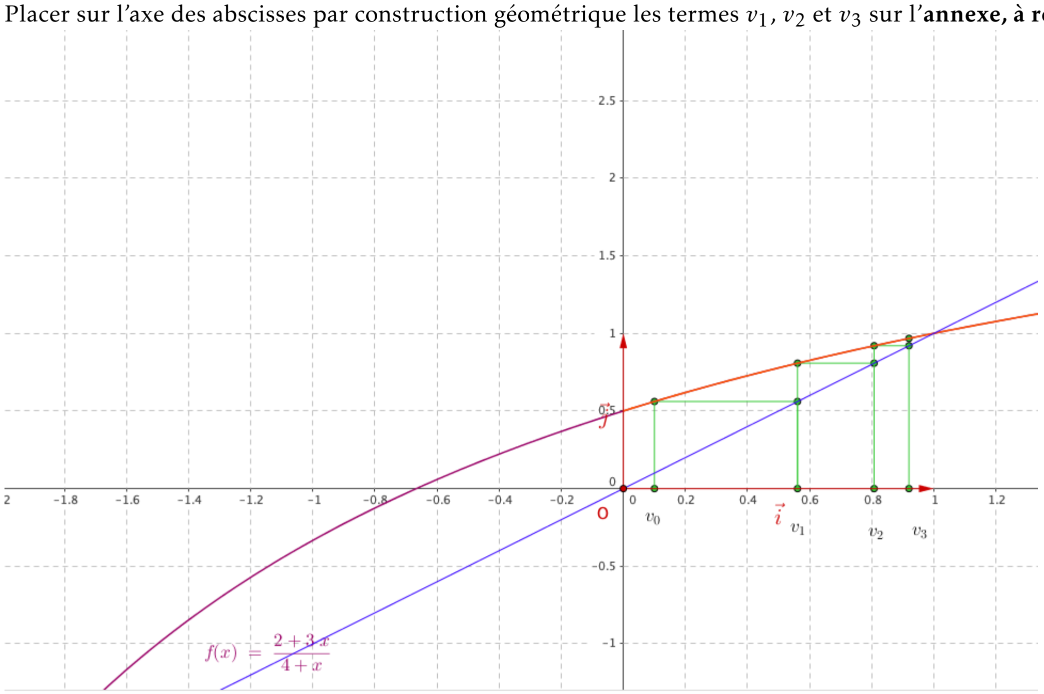
$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1 On donne en **annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.



Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle a pour limite 1.

2 **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n).$$

$$\begin{aligned} 1 - v_{n+1} &= 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n} \\ &= \frac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} \\ &= \frac{2-2v_n}{4+v_n} \\ &= \frac{2}{4+v_n}(1-v_n) \end{aligned}$$

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Initialisation pour $n = 0$, $\quad 1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$.

Hérédité Supposons qu'au rang $k \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On a $1 - v_{k+1} = \dfrac{2}{4+v_k}(1-v_k)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$1 - v_{k+1} \leqslant \dfrac{2}{4+v_k} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Or $0 \leqslant 1 - v_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k \iff v_k \geqslant 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \geqslant 0$; il suit que $4 + v_k \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \dfrac{1}{4+v_k} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On a donc $0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$, soit finalement :

$0 \leqslant 1 - v_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$: l'encadrement est vrai au rang $k+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang $k$quelconque il est vrai au rang $k+1$: d'après le principe de récurrence :

quel que soit le naturel n, $\quad 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3 La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la la limite de $1 - v_n = 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1.}$$