

BACCALAURÉAT BLANC 2020 DE MATHÉMATIQUES – SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Sont autorisées les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen » ou les calculatrices de type collègue.

Le mode examen ne devra être activé par le candidat qu'une fois entré en salle et sur instruction du surveillant de salle.

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.
Le candidat doit traiter les cinq exercices.*

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.
- ▶ votre classe : Terminale S1 ou Terminale S2 ou ...

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages.

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1

Commun à tous les candidats

5 points

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

V : « la bille est vendable ».

- 1 Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
- 2 Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
- 3 Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

- 1 Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
 - a. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires dans un sachet. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - b. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3} .
 - c. Calculer $P(10 \leq X \leq 15)$.

2 Bonus

Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Exercice 2

Commun à tous les candidats

5 points

- 1 On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3 + (-2\sqrt{3} + 2i)z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = 0 \quad (E).$$

- Montrer que le nombre $-2i$ est une solution de l'équation (E).
- Vérifier que, pour tout nombre complexe z , on a :

$$z^3 + (-2\sqrt{3} + 2i)z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})z + 8i = (z + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4).$$

- Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

- 2 On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} - i$.

- Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
- Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.
- On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_L du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

- 3 On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

- Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z' .
Montrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\bar{z}z'$ est un imaginaire pur.
- À l'aide de la question 3. a., démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.

Exercice 3

Commun à tous les candidats

1 point

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{cases}$$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

- Affirmation A :** La suite (t_n) est une suite géométrique.
- Affirmation B :** Pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

Exercice 4

Commun à tous les candidats

4 points

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geq 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en $\mu\text{g/mL}$) dans le sang en fonction du temps t (en minutes) écoulé après le début d'une hémorragie.

- 1**
- Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?
 - Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.
 - Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
On pourra utiliser l'écriture : $f(t) = -12 \times \left(-\frac{1}{4}t\right)e^{-\frac{1}{4}t} + 2$
Interpréter ce résultat.

- 2** On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

- 3**
- Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).
 - À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?
Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

- 4** Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0 ; 4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.
En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4 ; +\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.

On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

- 5** Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$ dans le sang.

Exercice 5**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****5 points***Les trois parties de cet exercice sont indépendantes***Partie A : puissance d'une matrice**Soit a un nombre réel donné.

On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1** On note I_3 la matrice identité d'ordre 3. Déterminer la matrice A telle que $M = I_3 + A$, et justifier que A^2 est une matrice nulle.
- 2** Calculer M^2 puis M^3 .
- 3** Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie B : un vrai faux et on passe à l'arithmétique !

Dans cette partie, on vous propose deux affirmations, et vous devez déterminer si elles sont vraies ou fausses. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

- 1** Toute matrice carrée non nulle admet une matrice inverse.
- 2** Pour tout entier naturel n , le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

Partie C : suites et arithmétiqueOn considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}.$$

- 1** Calculer a_2 et a_3 .
- 2** Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 16a_n - 3$.
- 3** Démontrer que, pour tout entier naturel n , a_n est un nombre entier naturel non nul.
- 4** Dans cette question on utilise l'égalité de la question 2. afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n) .
 - a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{3}$.
 - b.** Vérifier que $a_0 \equiv 1 \pmod{3}$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , le nombre a_n n'est pas divisible par 3.