Lycée l'Oiselet **Février 2020**

BACCALAURÉAT BLANC 2020 DE MATHÉMATIQUES – SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

---

*Sont autorisées les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « **mode examen** » ou les calculatrices de type collège.*
Le mode examen ne devra être activé par le candidat qu'une fois entré en salle et sur instruction du surveillant de salle.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.
Le candidat doit traiter les cinq exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- *votre classe : Terminale S1 ou Terminale S2 ou …*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages.

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1

Commun à tous les candidats **5 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1 Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

On a $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$

Donc $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588$.

$$\boxed{P(A \cap V) = 0,588}$$

2 Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(V) &= P(A \cap V) + P(B \cap V) \\ 0,96 &= 0,588 + P(B \cap V) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(B \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372.}$$

3 Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.

A-t-il raison ?

On veut calculer $P(_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{P\left(\overline{V}\right)}$.

On sait que $P\left(\overline{V}\right) = 1 - P(V) = 0,04$.

Puisque $P(V \cap B) = 0,372$ et $P(B) = 0,4$ alors $P_B(V) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$.

Ainsi $P_B\left(\overline{V}\right) = 1 - 0,93 = 0,07$.

Donc $P\left(\overline{V} \cap B\right) = P_B\left(\overline{V}\right) \times P(B) = 0,07 \times 0,4 = 0,028$.

Par conséquent $P(_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0,028}{0,04} = 0,7$.

$$\boxed{\text{Le technicien a donc raison}}$$

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1 Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires dans un sachet. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. l y a 40 tirages aléatoires, indépendants avec remise.

A chaque tirage, il y a deux issues N «La bille tirée est noire » et $\overline{N}$.

De plus $P(N) = \dfrac{1}{5} = 0,2$ (il y a équiprobabilité des couleurs lors de la teinte).

$$\boxed{\text{Donc } X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 40 \text{ et } p = 0,2.}$$

b. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Ainsi $P(X = 10) = \dbinom{40}{10} \times 0,2^{10} \times 0,8^{30} \approx 0,107$.

2nd DISTR A binomFdp(40 , 0.2 , 10)

$binomFdp(40, 0.2, 10) \approx 0.107$ Ceci calcule $P(X = 10)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40, 0.2)$)

c. Calculer $P(10 \leq X \leq 15)$.

On remarque que :

$$\begin{aligned} P(10 \leq X \leq 15) &= P(X \leq 15) - P(X \leq 9) \\ &\approx 0,997 - 0,732 \\ &\approx 0,265 \end{aligned}$$

2nd DISTR B binomFRép(40 , 0.2 , 15)

binomFRép$(40, 0.2, 15) \approx 0,997$ Ceci calcule $P(X \leq 15)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.2)$

$$\boxed{P(10 \leq X \leq 15) \approx 0,265}$$

2 **Bonus**

Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

On appelle X' la variable aléatoire comptant le nombre billes noires parmi n boules tirées.

Pour les mêmes raisons qu'à la question B.1.a X' suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

On veut obtenir :

$$\begin{aligned} P(X' \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - P(X' = 0) \geqslant 0,99 \\ &\iff -P(X' = 0) \geqslant -0,01 \\ &\iff P(X' = 0) \leqslant 0,01 \\ &\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \\ \\ &\iff n \ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \\ &\iff n \geqslant 21 \end{aligned}$$

> Il faut donc que les sachets contiennent au moins 21 billes pour que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans le sachet soit supérieure à 0,99.

Exercice 2

Commun à tous les candidats **5 points**

1 On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

a. Montrer que le nombre -2i est une solution de l'équation (E).

$$z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\text{i}\right)z^2+\left(4-4\text{i}\sqrt{3}\right)z+8\text{i}=0 \quad (E).$$

$(-2\text{i})^3+\left(-2\sqrt{3}+2\text{i}\right)\times(-2\text{i})^2+\left(4-4\text{i}\sqrt{3}\right)\times(-2\text{i})+8\text{i}$
$=8\text{i}+\left(-2\sqrt{3}+2\text{i}\right)\times(-4)+\left(4-4\text{i}\sqrt{3}\right)\times(-2\text{i})+8\text{i}$
$=8\text{i}+8\sqrt{3}-8\text{i}-8\text{i}-8\sqrt{3}+8\text{i}=\boxed{0}$.

-2i est donc bien une solution de l'équation (E).

b. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\text{i}\right)z^2+\left(4-4\text{i}\sqrt{3}\right)z+8\text{i}=(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right).$$

Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right) &= z^3-2\sqrt{3}z^2+4z+2\text{i}z^2-4\sqrt{3}\text{i}z+8\text{i}\\ &= z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\text{i}\right)z^2+\left(4-4\text{i}\sqrt{3}\right)z+8\text{i}\end{aligned}$$

Donc : $z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\text{i}\right)z^2+\left(4-4\text{i}\sqrt{3}\right)z+8\text{i}=(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$.

c. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un l'un des facteurs est nul.
On a :

- $z+2\text{i}=0$ donc $z_1=-2\text{i}$
- $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
  $\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times4=12-16=-4<0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées.
  $z_2=\dfrac{2\sqrt{3}-(2\text{i})}{2}=\sqrt{3}-\text{i}$ et $z_3=\overline{z_2}=\sqrt{3}+\text{i}$

L'ensemble des solutions de (E) est : $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\text{i}\,;\ \sqrt{3}-\text{i}\,;\ \sqrt{3}+\text{i}\}}$.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2 On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3}+\text{i}$ et $\sqrt{3}-\text{i}$.

a. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
On a $|z_1|=2$; $|z_2|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ et $|z_3|=|\overline{z_2}|=2$ donc $\boxed{OA=OB=OC=2}$.

A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b. Placer ces points sur une figure que l'on complètera par la suite.
Voir la figure en fin d'exercice.

c. On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

$$\begin{aligned}\text{AODL est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DL}\\ &\iff z_A-z_O=z_L-z_D\\ &\iff z_L=z_A+z_D\end{aligned}$$

Or D est le milieu de [OB] ; donc $z_D = \frac{1}{2}(z_O + z_B) = \frac{1}{2}z_B$

Ainsi $z_L = z_A + z_D = z_A + \dfrac{1}{2}z_B = -2\mathrm{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}}$.

$$\boxed{z_L = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}}$$

3 On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

a. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

$z\overline{z'} = (x + \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = xx' + yy' + \mathrm{i}(x'y - xy')$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff xx' + yy' = 0\\ &\iff \mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = 0\\ &\iff z\overline{z'} \text{est un imaginaire pur.}\end{aligned}$$

b. À l'aide de la question **3. a.**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OL}$ est $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

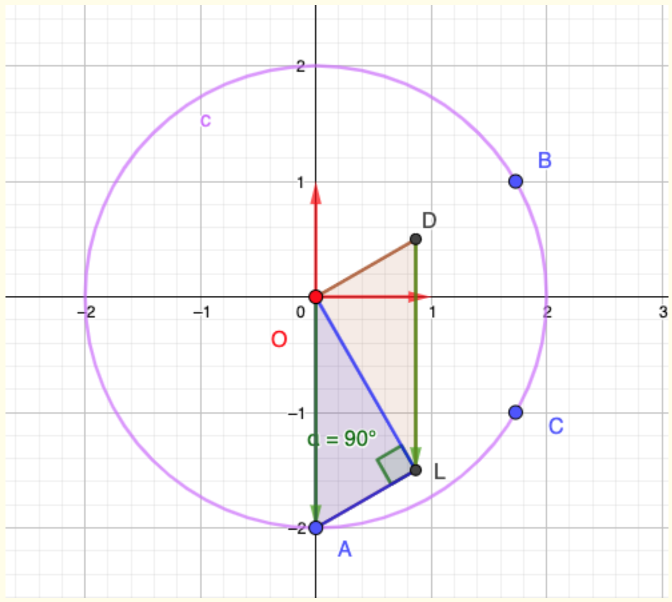
Celle du vecteur $\overrightarrow{AL}$ est $z' = z_L - z_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Alors : $z\overline{z'} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} - \dfrac{3}{4} = -\sqrt{3}\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AL}$ donc donc orthogonaux ;

$$\boxed{\text{le triangle AOL est bien **rectangle** en L.}}$$

Figure :



Exercice 3

Commun à tous les candidats **1 point**

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE et justifier cette réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\left\{\begin{array}{lcr} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 5. \end{array}\right.$$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par

$$t_n = u_n - 5.$$

1 **Affirmation A :** La suite (t_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 2u_n - 5 - 5 \\ &= 2\left(u_n - 5\right) \\ &= 2t_n \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = 2t_n$

La suite (t_n) est une suite géométrique de raison 2. L'affirmation A est vraie.

2 **Affirmation B :** Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n + 5.$$

Comme $t_n = u_n - 5$, on déduit $u_n = t_n + 5$.
La suite (t_n) est une suite géométrique de raison 2, donc $t_n = q^n \times t_0 = 2^n \times (u_0 - 5) = 9 \times 2^n$.

Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$. L'affirmation B est vraie.

Exercice 4

Commun à tous les candidats **4 points**

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5$ μg/mL.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minutes) écoulé après le début d'une hémorragie.

1 **a.** Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

On a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0} = 1$, donc $f(0) = 3 \times 0 \times 1 + 2 = 0 + 2 = 2$.

$\boxed{\text{Le taux de vasopressine dans le sang à l'instant } t = 0 \text{ est de } 2\ \mu\text{g/mL.}}$

b. Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

On a $12 \text{ s} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ (min).

On calcule $f(0,2) = 3 \times 0,2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0,2} + 2 = 0,6\mathrm{e}^{-0,05} + 2 \approx 2 + 0,57 \approx 2,57$.

$\boxed{\text{Ce taux est supérieur à 2,5, donc anormal.}}$

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

On écrit $f(t) = -12 \times \left(-\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\right) + 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} (-\frac{1}{4}t) = -\infty \\ \lim\limits_{T\to-\infty} T\exp(T) = 0 \text{ Limite de référence} \end{array}\right\} \text{ par composée } \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} = 0 \text{ , donc finalement :}$$

$\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2. \text{ Cela signifie qu'à terme le taux de vasopressine va se stabiliser à } 2\ \mu\text{g/mL.}}$

2 On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Vérifier que pour tout nombre réel t positif,

$$f'(t) = \frac{3}{4}(4 - t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}.$$

f somme et produit de fonctions dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et

$f = uv+2$, d'où $f' = u'v+v'u$ avec pour tout réel t, dans $[0\ ;\ +\infty[$: $\left\{\begin{array}{ll} u(t) & = 3t \\ v(t) & = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(t) & = 3 \\ v'(t) & = -\frac{1}{4}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 3t \times \left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(3 - \frac{3}{4}t\right) \\ &= 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}\left(1 - \frac{1}{4}t\right) \\ &= \frac{3}{4}(4 - t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a donc bien } f'(t) = \dfrac{3}{4}(4 - t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}}$

3 **a.** Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f (en incluant la limite en $+\infty$).

On sait que quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} > 0$; le signe de $f'(t)$ est donc celui de $4 - t$:

- $4 - t > 0 \iff 4 > t$;
- $4 - t > 0 \iff 4 < t$;
- $4 - t = 0 \iff 4 = t$.

Conclusion : la fonction f est

- croissante sur $[0\,;\,4]$ de $f(0) = 2$ à $f(4) = 3 \times 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 4} + 2 = 2 + 12\mathrm{e}^{-1} \approx 6,41$;
- décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$ de $f(4) \approx 6,41$ à $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2$

On déduit le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	2	$\nearrow$	$2 + 12\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	2

b. À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ?

La fonction étant croissante sur $[0\,;\,4]$ de $f(0) = 2$ à $f(4) \approx 6,41$ puis décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$, $f(4) = 2 + 12\mathrm{e}^{-1} \approx 6,41$ est le maximum de la fonction sur $[0\,;\,+\infty[$.

Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Le taux de vasopressine est maximal au bout de 4 minutes. Le maximum de ce taux est environ $6,41$ μg/mL.

4 Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 appartenant à $[0\,;\,4]$ telle que $f(t_0) = 2,5$.

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [0\,;\,4]$.
- ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $I = [0\,;\,4]$.
- ✍ $f(0) = 2$ et $f(4) = 2 + 12\mathrm{e}^{-1}$
- ✍ f réalise donc une bijection de $[0;2]$ sur $\left[2;2+12\mathrm{e}^{-1}\right]$
  $2,5$ est compris entre $f(0)$ et $f(2)$, en effet $f(0) < 2,5$ et $f(4) > 2,5$
  donc l'équation $f(t) = 2,5$ a une racine unique α dans $[0\,;\,4]$.

La calculatrice donne :
$f(0) = 2$ et $f(1) \approx 4,33$, donc $0 < t_0 < 1$;
$f(0,1) \approx 2,29$ et $f(0,2) \approx 2,57$, donc $0,1 < t_0 < 0,2$;
$f(0,17) \approx 2,49$ et $f(0,18) \approx 2,52$, donc $0,17 < t_0 < 0,18$;
$f(0,174) \approx 2,499$ et $f(0,175) \approx 2,503$, donc $0,174 < t_0 < 0,175$.

$0,174$ est donc une valeur approchée de t_0.

On admet qu'il existe une unique valeur t_1 appartenant à $[4\,;\,+\infty[$ vérifiant $f(t_1) = 2,5$.
On donne une valeur approchée de t_1 à 10^{-3} près : $t_1 \approx 18,930$.

5 Déterminer pendant combien de temps, chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine reste supérieur à 2,5 μg/mL dans le sang.

Sur l'intervalle $[t_0\ ;\ 4]$, la fonction f est croissante, donc sur cet intervalle $f(t) \geqslant f(t_0) = 2,5$ et sur l'intervalle $[4\ ;\ t_1]$ la fonction est décroissante donc sur cet intervalle
$f(t) \geqslant f(t_1) = 2,5$.
On a donc $f(t) > 2,5$ sur l'intervalle $]t_0\ ;\ t_1[$ ce qui signifie que :

le taux de vasopressine sera anormal pendant $t_1 - t_0 \approx 18,93 - 0,175$ soit environ 18,755 min soit 18 min 45 s.

Exercice 5

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : puissance d'une matrice

Soit a un nombre réel donné.
On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.
Déterminer la matrice A telle que $M = I_3 + A$, et justifier que A^2 est une matrice nulle.

De $M = I_3 + A$ on déduit $A = M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On montre que A^2 est la matrice nulle en effectuant le produit matriciel :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0\times a+0+a\times 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 Calculer M^2 puis M^3.

- Méthode 1 :

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & a+0+a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M^3 &= M^2 \times M\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 2a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0+0 & a+0+2a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 3a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Méthode 2 :

$$\begin{aligned}M^2 &= (A+I_3)^2\\ &= (A+I_3)(A+I_3)\\ &= A^2+A+A+I_3\\ &= I_3+2A\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 2a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}M^3 &= M^2 \times M\\ &= (I_3+2A)(I_3+A)\\ &= I_3+A+2A+2A^2\\ &= I_3+3A\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 3a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3 Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$M^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & na\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Notos $\Pi(n)$:« $M^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & na\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ »

- Intialisation :

$$M^1 = M = \begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\times a\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ainsi $\Pi(1)$ est vraie.

- Hérédité : Soit $k \geq 1$ un entier fixé. On suppose que $M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ka \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k \times M \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & ka \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & a+0+ka \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & (k+1)a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  La propriété $\Pi(n)$ est donc héréditaire.
- Conclusion :
  - $\Pi(1)$ est vraie.
  - Pour un entier $k \geq 1$; $\Pi(k)$ vraie entraîne $\Pi(k+1)$ vraie..
  - Le principe de récurrence s'applique, ainsi pour tout entier n non nul, on a : $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie B : un vrai faux et on passe à l'arithmétique !

Dans cette partie, on vous propose deux affirmations, et vous devez déterminer si elles sont vraies ou fausses.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

1 Toute matrice carrée non nulle admet une matrice inverse.

Faux : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fournit un contre exemple, en effet :

- A et non nulle
- dét(A)=0 donc A n'est pas inversible.

2 Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

On pose la division euclidienne de n par 10 ; $n = 10k + r$ où $0 \leq r < 9$.
Comme r est un entier, on a $r = 0$ ou $r = 1$ ou $r = 2$ ou $\cdots r = 3$; ce qui fournit $n \equiv 0\ [10]$ ou $n \equiv 1\ [10]$ ou $n \equiv 2\ [10]$ ou $\cdots n \equiv 9\ [10]$.
On fait alors un tableau de congruences :

$n \equiv \cdots\ [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \cdots\ [10]$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$n^2 + n \equiv \cdots\ [10]$	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Conclusion : L'équation $n^2 + n \equiv 4\ [10]$ n'a pas de solution et donc le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

Partie C : suites et arithmétique

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}.$$

1 Calculer a_2 et a_3.

- $a_2 = \dfrac{4^5+1}{5} = \dfrac{1025}{5} = 205$
- $a_3 = \dfrac{4^7+1}{5} = \dfrac{16385}{5} = 3\,277$

$$\boxed{a_2 = 205 \text{ et } a_3 = 3\,277}$$

2 Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 16a_n - 3$.

- Méthode 1 :

  Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{4^{2(n+1)+1}+1}{5} \\ &= \frac{4^{2n+3}+1}{5} \\ &= \frac{4^{2+2n+1}+1}{5} \\ &= \frac{4^2\times 4^{2n+1}+1}{5} \\ &= \frac{16\times(4^{2n+1}+1)-15}{5} \\ &= 16\times\frac{4^{2n+1}+1}{5} - \frac{15}{5} \\ &= 16a_n - 3 \end{aligned}$$

- Méthode 2 :Une récurrence !
  Notos $P(n)$:« $a_{n+1} = 16a_n - 3$ »

  → Intialisation : $a_0 = \dfrac{4^1+1}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$
  $a_1 = \dfrac{4^3+1}{5} = \dfrac{65}{5} = 13$
  $16a_0 - 3 = 16\times 1 - 3 = 13 = a_1$
  Ainsi $P(0)$ est vraie.

  → Hérédité : Soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $a_{k+1} = 16a_k - 3$

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= \frac{4^{2(k+2)+1}+1}{5} \\ &= \frac{4^{2k+5}+1}{5} \\ \text{Par ailleurs } 16a_{k+1} - 3 &= 16\times\frac{4^{2k+3}+1}{5} - 3 \\ &= 4^2\times\frac{4^{2k+3}+1}{5} - \frac{15}{5} \\ &= \frac{4^2\times 4^{2k+3}+4^2-15}{5} \\ &= \frac{4^{2k+5}+1}{5} \end{aligned}$$

  La propriété $P(n)$ est donc héréditaire.

  → Conclusion :
  - $P(0)$ est vraie.

- Pour un entier $k \geq 0$; $P(k)$ vraie entraîne $P(k+1)$ vraie..
- Le principe de récurrence s'applique, ainsi pour tout entier n, on a : $a_{n+1} = 16a_n - 3$.

3 Démontrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un nombre entier naturel non nul.

Notos $Q(n)$:« a_n est entier et $a_n \geq 1$ »

- Intialisation : $a_0 = 1$

  Ainsi $Q(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que a_k est entier et $a_k \geq 1$
  Or $a_{k+1} = 16a_k - 3$

$$\begin{aligned} a_k &\geq 1 \\ \text{Donc } 16a_k &\geq 16 (16 > 0) \\ \text{Puis } 16a_k - 3 &\geq 13 \geq 1 \\ \text{Soit } a_{k+1} &\geq 1 \end{aligned}$$

  Par ailleurs comme a_k est un entier $16a_k - 3$ est un entier comme somme d'entiers. La propriété $Q(n)$ est donc héréditaire.
- Conclusion :
  - $Q(0)$ est vraie.
  - Pour un entier $k \geq 0$; $Q(k)$ vraie entraîne $Q(k+1)$ vraie..
  - Le principe de récurrence s'applique, ainsi pour tout entier n, on a : a_n est un entier positif donc est bien un entier naturel.

4 Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} \equiv a_n\ [3]$.

Déjà $a_{n+1} = 16a_n - 3$,
comme $16 \equiv 1\ [3]$ car $16 = 3 \times 5 + 1$
d'où $16a_n \equiv a_n\ [3]$(Compatibilté des congruences avec la multiplication)

$$\left.\begin{array}{l} 16a_n \equiv a_n\ [3] \\ 3 \equiv 0\ [3] \end{array}\right\} \quad \text{Compatibilté des congruences avec l'addition } 16a_n - 3 \equiv a_n\ [3]$$

Soit $a_{n+1} \equiv a_n\ [3]$.

b. Vérifier que $a_0 \equiv 1\ [3]$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.

$a_0 = 1$ donc $a_0 \equiv 1\ [3]$.
Par une récurrence évidente on montre que $a_n \equiv 1\ [3]$.
Ainsi le reste de la division euclidienne de a_n par 3 est 1, donc pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.