Nom : .... Prénom :	**DM 07**	TS4 Fév. 2020 Devoir n° 14 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Présentation : 2 points

Exercice 1 : Étude d'une équation ...

Partie A

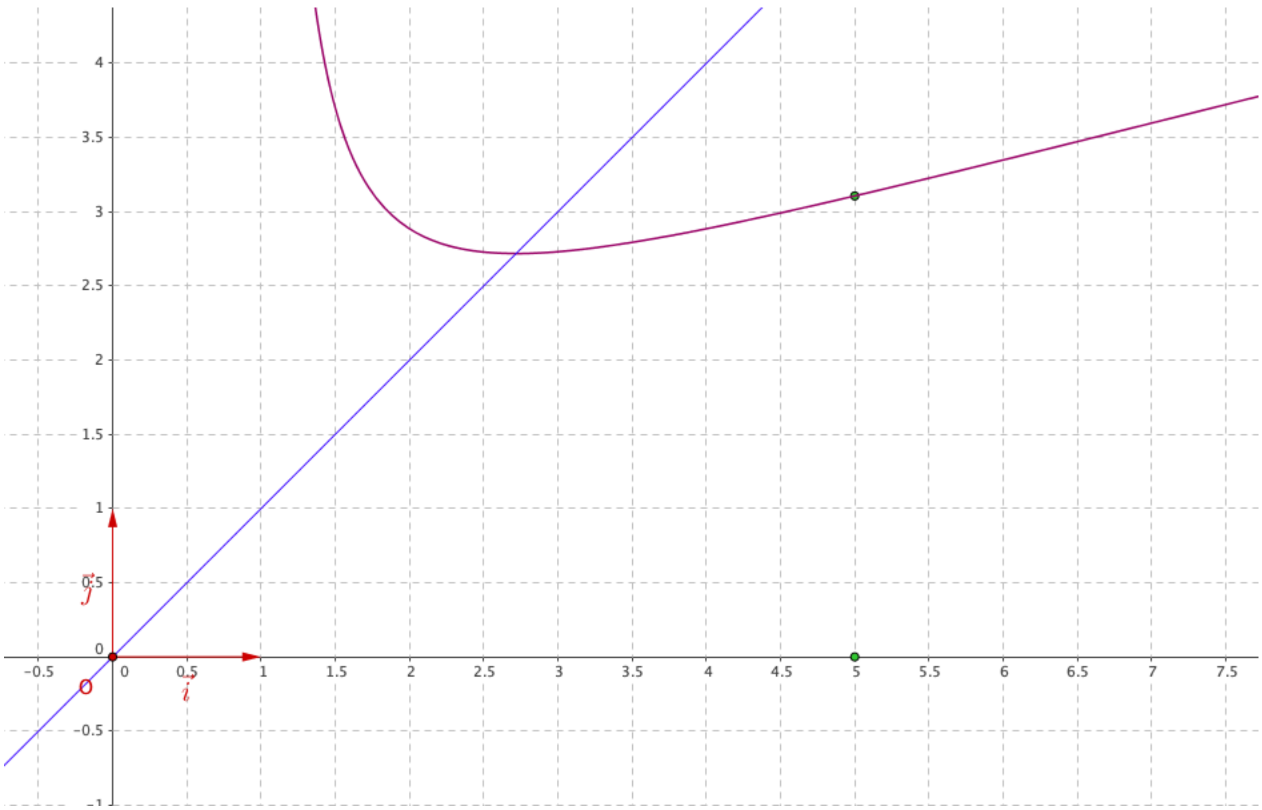
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.
   a. On a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur la figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie. Construire la droite d'équation $y = x$ et les points M_0, M_1 et M_2 de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) et sur sa convergence.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \mathrm{e}$ (on pourra utiliser la question 1. b.).
   c. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge vers un réel ℓ. Justifier que ℓ appartient à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

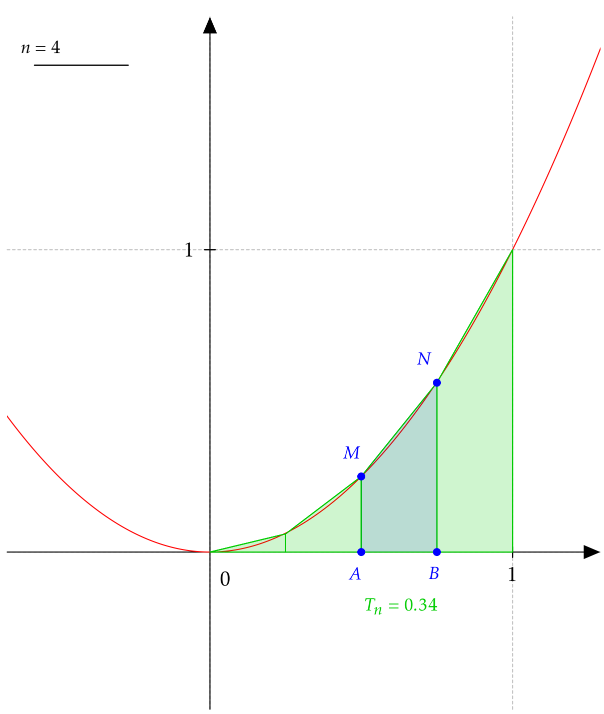
Partie B

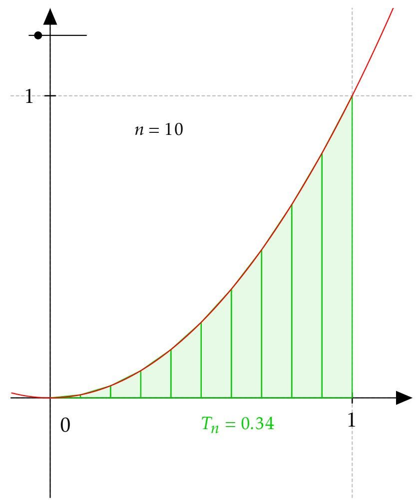
1. Démontrer que $f(\ell) = \ell$.
2. En déduire la valeur de ℓ.



Exercice 2 : Méthode des trapèzes ...

f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2$ et on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$.
On se propose de calculer par la méthode des trapèzes l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.





Mise en oeuvre avec GeoGebra :

Saisir dans la zone de saisie

- ✎ un curseur que l'on nomme n variant de 0 à 60 avec une incrémentation de 1.
- ✎ $f(x) =$ Fonction[x^2,0,1]
- ✎ T_n =SommeTrapèzes[f,0,1,n]
- ✎ Pour T_n afficher dans le menu propriétés , Afficher l'étiquette valeur et nom.

1 On considère les points $A\left(\frac{k}{n};0\right)$, $B\left(\frac{k+1}{n};0\right)$ puis M et N de la parabole d'abscisses respectives $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$.
Vérifier que l'aire du trapèze $ABNM$ est

$$A_k = \frac{1}{2n^3}[k^2 + (k+1)^2]$$

2 On s'intéresse à $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}$.

a. S_n est-elle une valeur approchée par excès ou par défaut ?

b. Construire un algorithme calculant S_n.

c. En déduire S_{10} et S_{100}.

d. Quelle conjecture peut-on émettre pour la valeur de A ?

3 **a.** Démontrer que

$$S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2.$$

b. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
On utilisera le résultat démontré en cours :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.Conclure.