Nom :	**DM 07**	TS4 · Fév. 2020
Prénom :		Devoir n° 14 · .../...

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises**.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Présentation : 2 points

Exercice 1 : Étude d'une suite ...

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1 **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

Limite en 1^+ :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} x = 1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0^+\end{array}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty}$$

Limite en $+\infty$:

Une limite usuelle du cours nous donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$ par inverse,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

b. Étudier les variations de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $]1\ ;\ +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{1 \times \ln x - \frac{1}{x} \times x}{\ln^2 x} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}}$$

On étudie le signe de la dérivée :

Le dénominateur étant le carré d'un réel non nul, il est strictement positif, ainsi (x) a le signe de $\ln x - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

en effet la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On conclut avec le tableau de variation de f sur $]1\ ;\ +\infty[$

x	1		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$	‖ $+\infty$				0
			e		

2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Graphique plus loin

Au vu du graphique la suite (u_n) semble décroissante, minorée par e, ainsi (u_n) semble être convergente.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \mathrm{e}$ (on pourra utiliser la question 1. b.).

On note $P(n)$ la propriété $u_n \geq \mathrm{e}$

- ✏ Initialisation : $u_0 = 5$ et $\mathrm{e} \approx 2.7$ donc $P(0)$ est vraie.
- ✏ Hérédité : Soit $p \geq 0$, on suppose que : $P(p)$ est vraie $u_p \geq \mathrm{e}$ (HR)

  On doit prouver que : $P(p+1) : u_{p+1} \geq \mathrm{e}$

  Or $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$

  En partant de (HR) $u_p \geq \mathrm{e}$

  En appliquant la fonction f strictement croissante sur $[\mathrm{e}; +\infty[$, on obtient $f\left(u_p\right) \geq f(\mathrm{e})$ soit $u_{p+1} \geq \mathrm{e}$
- ✏ Conclusion : $P(0)$ est vraie et la propriété $P(n)$ est héréditaire.

  Le principe de récurrence s'appliquant, on a pour tout entier $n \geq 0; u_n \geq \mathrm{e}$

La suite (u_n) est donc minorée par e

c. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Méthode 1 :

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\ln u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n \ln_n}{\ln u_n} = \dfrac{u_n(1 - \ln_n)}{\ln u_n}$:

Comme on a montré que $u_n \geq \mathrm{e}$, on déduit :$\ln u_n \geq \ln \mathrm{e}$; soit $\ln u_n \geq 1$, ou encore $1 - \ln u_n \leq 0$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

Ainsi on a prouvé que la suite (u_n) est décroissante.

Méthode 2 : on démontre par récurrence la propriété $Q(n) : u_n \geq u_{n+1} \geq \mathrm{e}$. A vous !

En déduire qu'elle converge vers un réel ℓ.

La suite (u_n) est décroissante minorée par e, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

Justifier que ℓ appartient à l'intervalle $[\mathrm{e} ; +\infty[$.

D'après la question 2) b) on a $u_n \geq \mathrm{e}$, par passage à la limite sur les inégalités on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n \geq \mathrm{e}$, soit $\ell \geq \mathrm{e}$

$$\boxed{\ell \in [\mathrm{e} ; +\infty[}$$

Partie B

1 Démontrer que $f(\ell) = \ell$.

Tous les termes de (u_n) sont dans $[\mathrm{e} ; +\infty[$ intervalle où f est continue car dérivable.

Ayant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$; on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$

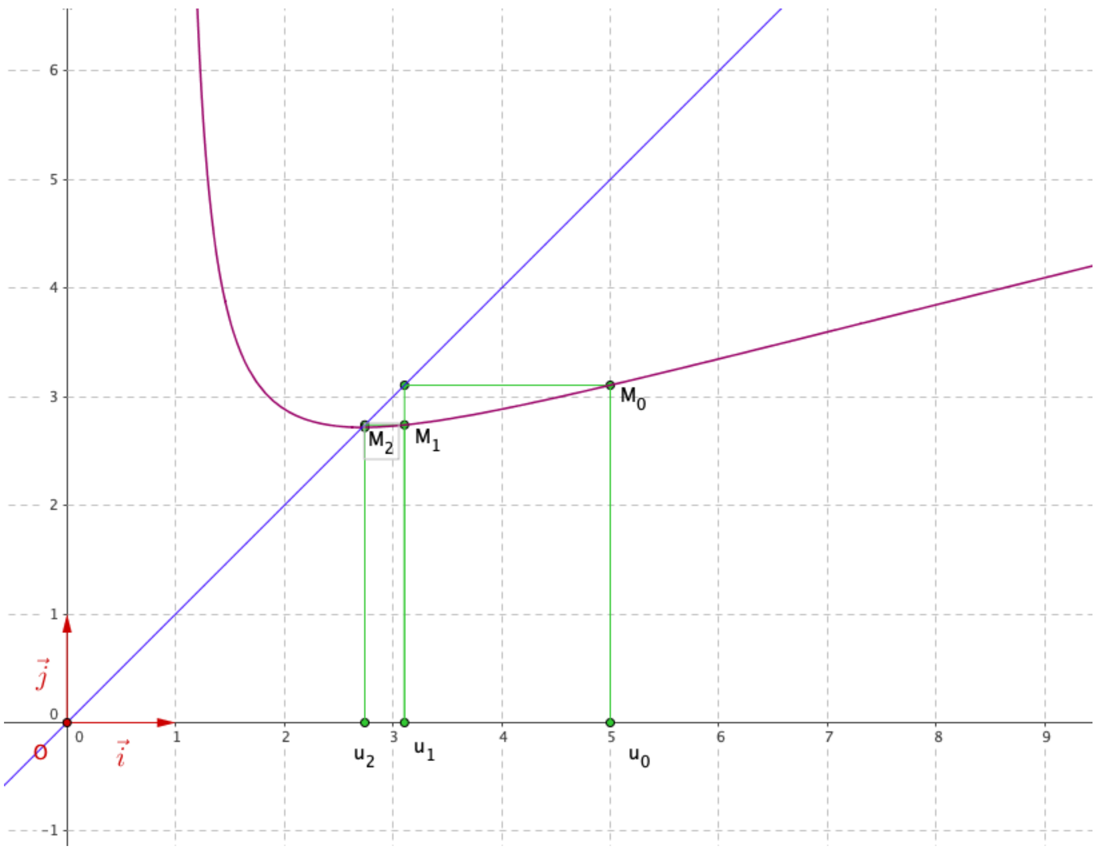
Par ailleurs $u_{n+1} = f(u_n)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$

L'unicité de la limite donne $\ell = f(\ell)$

2 En déduire la valeur de ℓ.

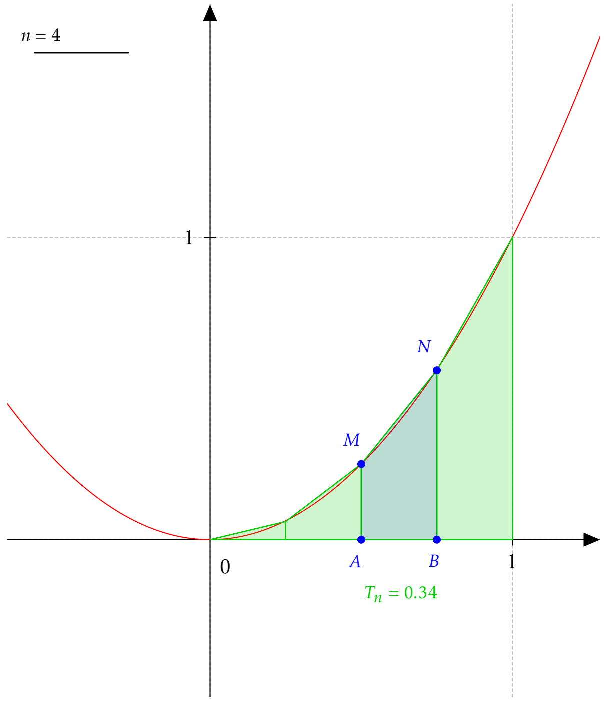
$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell} \Leftrightarrow \ell - \dfrac{\ell}{\ln \ell} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ell(\ln \ell - 1)}{\ln \ell} = 0 \Leftrightarrow \ln \ell = 1 \text{ou } \ell = 0 \text{ avec } \ell \geq \mathrm{e}$
$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \mathrm{e}$

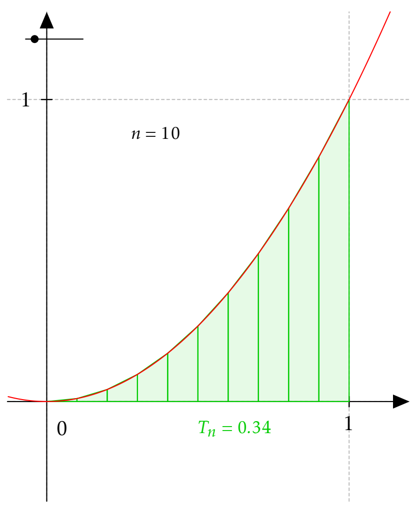
La suite (u_n) converge vers e



Exercice 2 : Méthode des trapèzes ...

f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2$ et on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On se propose de calculer par la méthode des trapèzes l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.





Mise en oeuvre avec GeoGebra :

Saisir dans la zone de saisie

- ✎ un curseur que l'on nomme n variant de 0 à 60 avec une incrémentation de 1.
- ✎ $f(x) = \text{Fonction}[x^2,0,1]$
- ✎ T_n =SommeTrapèzes[f,0,1,n]
- ✎ Pour T_n afficher dans le menu propriétés , Afficher l'étiquette valeur et nom.

1 On considère les points $A\left(\frac{k}{n};0\right), B\left(\frac{k+1}{n};0\right)$ puis M et N de la parabole d'abscisses respectives $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, où k est un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$.
Vérifier que l'aire du trapèze $ABNM$ est

$$A_k = \frac{1}{2n^3}[k^2 + (k+1)^2]$$

$$
\begin{aligned}
\text{Aire } (ABNM) &= A_k = \frac{(B+b)h}{2} \\
&= \frac{(AM+BN)\times AB}{2} \\
&= \frac{\left(f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\times\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)}{2} \\
&= \frac{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2\right)\times\left(\frac{1}{n}\right)}{2} \\
&= \left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{(k+1)^2}{n^2}\right)\times\left(\frac{1}{2n}\right) \\
&= \left(\frac{k^2+(k+1)^2}{n^2}\right)\times\left(\frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2n^3}[k^2+(k+1)^2]
\end{aligned}
$$

L'aire du trapèze $ABNM$ est $A_k = \frac{1}{2n^3}[k^2+(k+1)^2]$

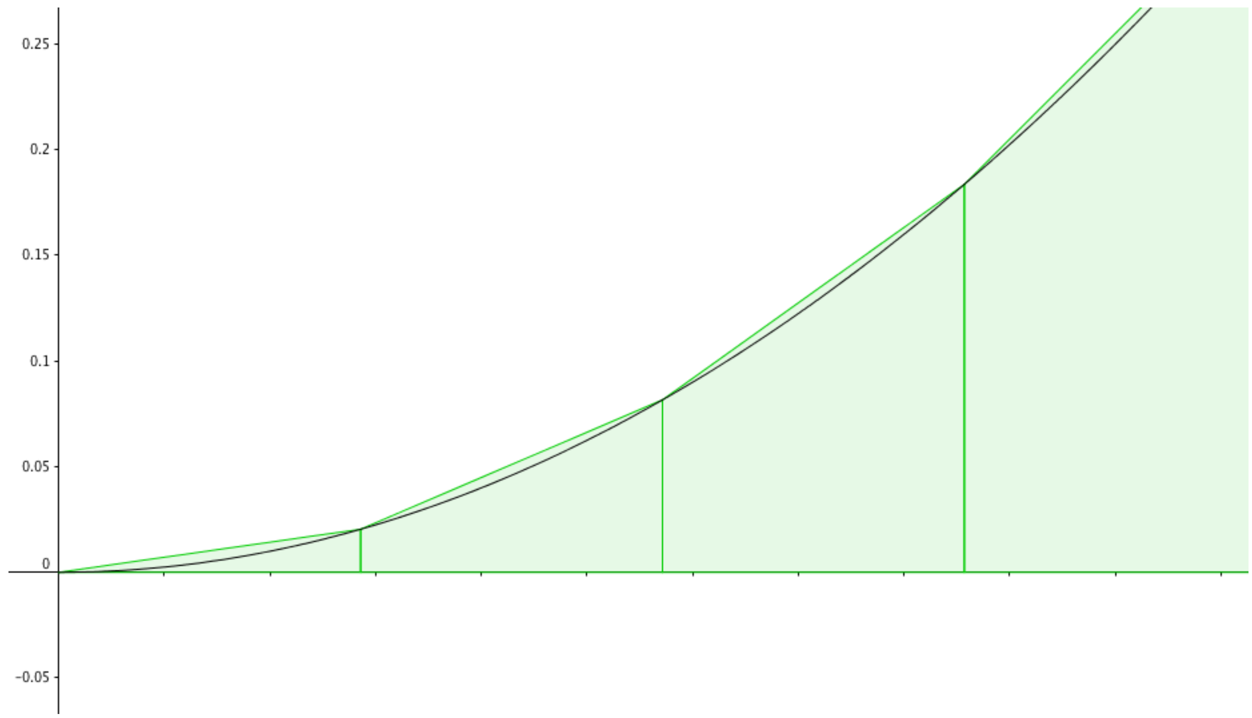
2 On s'intéresse à $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}$.

a. S_n est-elle une valeur approchée par excès ou par défaut ?
A partir du graphique, on voit que le segment $[MN]$ est situé au dessus de l'arc de courbe correspondant, donc pour tout entier k, où $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$A_k \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$

Ainsi, on a :

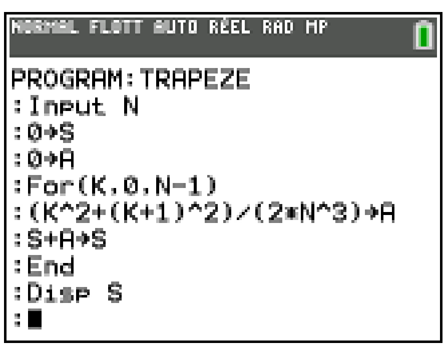
$$
\begin{aligned}
A_0 &\geq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx \\
A_1 &\geq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)dx \\
A_2 &\geq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(x)dx \\
&\ldots \\
A_{n-1} &\geq \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x)dx \\
\hline
A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} &\geq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)dx + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(x)dx \\
A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} &\geq \int_0^{1} f(x)dx \text{ d'après la relation de Chasles}
\end{aligned}
$$

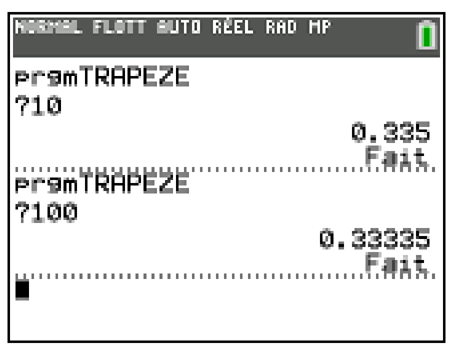


b. Construire un algorithme calculant S_n.

	Les variables sont l'entier naturel N et les réels A, S.
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0
	Affecter à A la valeur 0
	Affecter à S la valeur 400
Traitement :	Pour K allant de 0 à $N-1$
	Affecter à A la valeur $\dfrac{1}{2n^3}[k^2+(k+1)^2]$
	Affecter à S la valeur $S+A$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

c. En déduire S_{10} et S_{100}.
En exécutant cet algorithme sur une calculatrice, on obtient :





$$\boxed{S_{10} \approx 0,335 \text{ et } S_{100} \approx 0,33335}$$

d. Quelle conjecture peut-on émettre pour la valeur de A ?

$$\boxed{\text{On peut conjecturer que } A = \frac{1}{3}}$$

3 **a.** Démontrer que

$$S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + (n-1)^2\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2.$$

$$\begin{aligned}
S_n &= A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}\\
&= \frac{1}{2n^3}[0^2+1^2] + \frac{1}{2n^3}[1^2+2^2] + \frac{1}{2n^3}[2^2+3^2] + \ldots + \frac{1}{2n^3}[(n-2)^2+(n-1)^2] + \frac{1}{2n^3}[(n-1)^2+n^2]\\
&= \frac{1}{2n^3}[0^2] + \frac{1}{2n^3}[1^2+1^2] + \frac{1}{2n^3}[2^2+2^2] + \ldots + \frac{1}{2n^3}[(n-1)^2+(n-1)^2] + \frac{1}{2n^3}[n^2]\\
&= \frac{1}{2n^3}[2\times 1^2] + \frac{1}{2n^3}[2\times 2^2] + \frac{1}{2n^3}[2\times 3^2] + \ldots + \frac{1}{2n^3}[2\times (n-1)^2] + \frac{1}{2n^3}[n^2]\\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2] + \frac{1}{2n\times \cancel{n^2}}[\cancel{n^2}]\\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^3+\ldots+(n-1)^2\right)\\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2
\end{aligned}$$

b. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
On utilisera le résultat démontré en cours :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ (\star)$$

De l'égalité $(\star)$, on déduit :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\
&= \frac{1}{2n} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}}$$

c. Calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.Conclure.

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cancel{n^2}}{6\cancel{n^2}} = \frac{1}{3}\\
&\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{S_n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

On a prouvé à la question 2.a. que $S_n \geq A$, par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\frac{1}{3} \geq A$

$$\boxed{\text{On a seulement l'inégalité } A \leq \frac{1}{3}}$$