Nom :	DM 05	TS4 — Déc. 2019 — Devoir n° 10 — .../...
Prénom :		

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Présentation : 2 points

Exercice 1 : jeux vidéo ...

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
   $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Donner l'algorithme qui affiche le plus petit entier naturel n tel que : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$.
   Quel est cet entier ?
8. Démontrer que (p_n) est une suite croissante.
9. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Exercice 2 : ...

Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

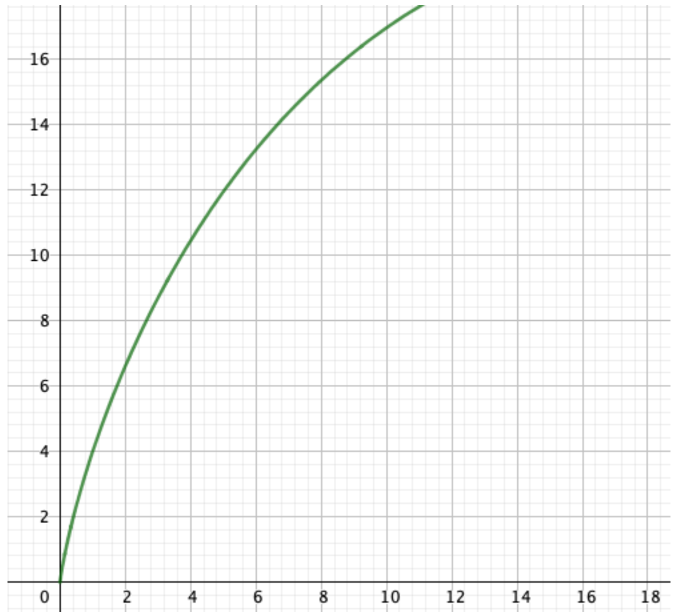
$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. **a.** On rappelle que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0.$$

b. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.