| Nom : .......................... | **DM 03** | TS4 — Oct. 2019 — Devoir n° 7 — .../... |
|---|---|---|
| Prénom : ........................ | | |

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.* ***Faites des phrases claires et précises.***
*Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.*

*Présentation : 2 points*

## Exercice 1 : Étude d'une fraction rationnelle ...

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. Justifier brièvement que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2}$$
2. Conjecturer une racine de $x^3+3x-4$ et valider la conjecture. Factoriser cette expression pour $x \in \mathbb{R}$. (théorèmes de factorisation et d'identification)
3. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de $f$.
4. Déterminer $a, b, c, d$ réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$$
5. Étudier le signe de $f(x) - x + 2$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
8. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe, au point d'abscisse $-1$.
9. Représenter soigneusement $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes, les tangentes horizontales de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ elle même.
10. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution $\alpha$. En donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

## Exercice 2 : Méthode de Héron ...

L'objectif est de définir une suite permettant le calcul approché de racines carrées par des opérations simples (divisions, sommes, produits).

Soit $a \in [1;+\infty[$ et $f$ la fonction $f : ]0;+\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x} + x\right)$.

On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 \in [\sqrt{a};a]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
2. Calculer $f(\sqrt{a})$ et $f(a)$ en faisant apparaître ces valeurs dans le tableau précédent.
En déduire : pour $x \in [\sqrt{a};a]$, $f(x) \in [\sqrt{a};a]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{a};a]$. (on a ainsi prouvé que $u_n \neq 0$, donc que la suite est bien définie)
4. Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante, puis convergente vers une limite $\ell$.

**5** Démontrer que $\ell$ vérifie $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\ell} + \ell\right)$. En déduire $\ell$.

**6** Dans cette question (seulement), $a = 2$ et $u_0 = 2$. Exprimer $u_3$ sous forme d'une fraction. À combien de décimales $u_3$ approche-t-elle $\sqrt{2}$ ?

**7** dans cette question on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite $(u_n)$.
On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \sqrt{a}$ qui mesure l'écart entre $u_n$ et $\sqrt{a}$.
On suppose que $u_0$ approche $\sqrt{a}$ par excès à 0,5 près : $0 \leq v_0 \leq 0{,}5$.

**a.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2u_n}$. En déduire : $v_{n+1} \leq v_n^2$.

**b.** Par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n < \dfrac{1}{2^{2^n}}$

**c.** En déduire $v_4 < 10^{-4}$. À partir de quel rang $n$ peut-on dire la suite $(u_n)$ approche $\sqrt{a}$ avec une précision de 1 000 décimales ?