

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.



Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1

11 points

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,25$.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X , notée $E(X)$, est égale à :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x 0,25te^{-0,25t} dt.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(X) = 4$.

- 1.5 pt **1** On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 0,25te^{-0,25t}$.
On définit la fonction G sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $G(t) = (-t - 4)e^{-0,25t}$.
Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

- 1.5 pt **2** En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 4.
Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-0,25x} = 0.$$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T .
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ .
Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0,067$.

- 0.5 pt **1 a.** On considère $Z = \frac{T - 40}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par Z ?
1 pt **b.** Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.
1 pt **2** Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

- 1** La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,25 \text{ min}^{-1}$.
0.5 pt **a.** Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.

- 1 pt **b.** Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.
- 1,5 pt **c.** Quelle est la probabilité que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes sachant qu'il a attendu plus de 5 minutes?

2 L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 92 % attendent moins de 10 minutes;
- parmi les clients passant en caisse, 65 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » ;

\bar{B} : « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

- 1 pt **a.** Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.
- 1.5 pt **b.** m Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

**Exercice 2 : Malformation cardiaque****3 points**

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %. On considère un échantillon de 400 personnes.

- 2 pts **1** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % .
- 1 pt **2** Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme. Qu'en pensez-vous ?

**Exercice 3****7,5 points**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln x - x^2 + 1.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

- 1.5 pt **1** Calculer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.
- 0.5 pt **2** Interpréter graphiquement les résultats précédents.
- 1 pt **3** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .
- 1.5 pt **4** Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
- 3 pts **5** Déterminer le nombre de solutions et une valeur exacte ou au moins une valeur approchée de(s) solution(s) de l'équation :

$$\ln x = x^2 - 1$$