Nom :	DS 09	TS3 — Mai 2019
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 18 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — 11 points

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,25$.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 0,25te^{-0,25t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(X)=4$.

1.5 pt **1** On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(t)=0,25te^{-0,25t}$.
On définit la fonction G sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $G(t)=(-t-4)e^{-0,25t}$.
Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
La fonction G sera une primitive de g sur $[0~;~+\infty[$ si et seulement si elle est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et que sa fonction dérivée est la fonction g.
Avec les règles de composition et de produit de fonctions classiques, la fonction G est effectivement dérivable sur $[0~;~+\infty[$, et pour tout t réel positif, on a :
G est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.
$G=uv$, d'où $G'=u'v+v'u$ avec pour tout réel t, dans$[0~;~+\infty[$: $\begin{cases} u(t) &=(-t-4)\\ v(t) &=e^{-0,25t}\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(t) &=-1\\ v'(t) &=-0,25e^{-0,25t}\end{cases}$

$$\begin{aligned} G'(t) &=(-1)\times e^{-0,25t}+(-t-5)\times(-0,25)e^{-0,25t}\\ &=\Big(-1+0,25t+0,25\times4\Big)e^{-0,25t}\\ &=0,25te^{-0,25t}=g(t)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est donc bien une primitive de } g \text{ sur } [0~;~+\infty[.}$

1.5 pt **2** En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 4.
Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-0,25x}=0.$$

En appliquant la définition de l'espérance, rappelée dans l'énoncé, on va commencer par calculer l'intégrale de g entre 0 et x :
$\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=\Big[G(t)\Big]_0^x=G(x)-G(0)=(-x-4)\,e^{-0,25x}-(0-4)\,e^{-0,25\times0}=-x\,e^{-0,25x}-4\,e^{-0,25x}+4$
Déterminons maintenant la limite de cette intégrale quand x tend vers $+\infty$.
Puisque cette limite est admise dans le sujet, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-0,25x}=0$.

Comme $-0,25$ est négatif, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} -0,25x = -\infty$, or $\lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,25x} = 0$.
Finalement, par limite de la somme de fonctions, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} -x\,\mathrm{e}^{-0,25x} - 4\,\mathrm{e}^{-0,25x} + 4 = 4.$

$$\boxed{\text{En conclusion, on a bien établi que l'espérance } \mathrm{E}(X) \text{ est bien égale à } 4.}$$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.
Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0,067$.

0.5 pt **1** **a.** On considère $Z = \dfrac{T-40}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par Z ?

Puisque T suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart-type σ, on peut dire que Z suit la loi normale centrée et réduite.

1 pt **b.** Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.

Par ailleurs les évènements $(T < 10)$ et $\left(Z < \dfrac{10-40}{\sigma}\right)$ sont équivalents, et ont donc la même probabilité.

En utilisant la calculatrice avec la fonction inversant la loi normale centrée réduite, on obtient que la borne $\dfrac{10-40}{\sigma} = \dfrac{-30}{\sigma}$ doit être environ égale à $-1{,}498\,5$.

En résolvant, on a $\sigma \approx \dfrac{-30}{-1{,}498\,5}$, soit $\sigma \approx 20{,}019\,8\,\text{min}$, soit, en donnant un arrondi à la seconde près, 20 min 01 s. (car $0,0198 \times 60 \approx 1,2$)

Autre rédaction :

$$\begin{aligned}
P(T<10) = 0,067 \quad &\iff P\left(Z < \frac{10-40}{\sigma}\right) = 0,067\\
&\iff P\left(Z < \frac{-30}{\sigma}\right) = 0,067\\
&\iff \pi\left(Z < \frac{-30}{\sigma}\right) = 0,067\\
&\iff \frac{-30}{\sigma} = \pi^{-1}(0,067)\\
&\iff -30 = \sigma\pi^{-1}(0,067)\\
&\iff \sigma = \frac{-30}{\pi^{-1}(0,067)}\\
&\iff \sigma = \frac{-30}{\text{FracNormale}(0,067)}
\end{aligned}$$

On obtient

$$\sigma \approx 20,0198$$

Remarque : Ici la modélisation implique que les valeurs prises par T peuvent être négatives, et ce de façon non complètement négligeable, puisque la probabilité d'avoir T négatif va être proche de $0,025$, le 0 étant presque égal à $\mu - 2\sigma$. Cela peut sembler déstabilisant, mais ici, la modélisation est donnée et n'est pas à remettre en cause.

1 pt **2** Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?
Puisque le temps est exprimé en minutes, une heure correspond à 60 minutes, et donc la probabilité cherchée est obtenue à la calculatrice :
$P(T \geqslant 60) = 1 - P(T < 60) \approx 0{,}158\,7$.

2nd DISTR 2 normalFRép(-10^{99} , 60 , 40 , 20)

normalFRép(-10^{99}, 60, 40, 20) $\approx 0,8413$ Ceci calcule $P(X \leq a)$ dans le cas où X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ Puisque la question est posée en terme de proportion, on va supposer que la modélisation est fiable et que les probabilités sont assimilables à des proportions, et donc qu'environ 15,9 % des clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1 La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,25\ \text{min}^{-1}$.

0.5 pt **a.** Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
Comme cette variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $0,25\,\text{min}^{-1}$, on est exactement dans la situation étudiée à la **Partie A** et donc on va en utiliser le résultat :

la durée moyenne d'attente aux caisses automatiques est de 4 minutes.

1 pt **b.** Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

$P(X \geqslant 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \displaystyle\int_0^{10} 0,25\mathrm{e}^{-0,25t}\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-0,25\times 10} = \mathrm{e}^{-2,5} \approx 0,082.$

À 10^{-3} près, la probabilité qu'un client attende plus de dix minutes aux bornes automatiques est donc de 0,082.

1,5 pt **c.** Quelle est la probabilité que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes sachant qu'il a attendu plus de 5 minutes ?
On veut calculer la probabilité conditionnelle : $P_{(X\geq 5)}(X \geq 10)$.
Deux méthodes sont possibles :

- D'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_{(X\geq 5)}(X \geq 10) &= \frac{P\left((X \geq 5) \cap (X \geq 10)\right)}{P((X \geq 5))} \\ &= \frac{P\left((X \geq 10)\right)}{P((X \geq 5))} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-10\lambda}}{\mathrm{e}^{-5\lambda}} \\ &= \mathrm{e}^{-5\lambda} \\ &= \mathrm{e}^{-5\times 0,25} \approx 0,286 \end{aligned}$$

- On utilise le fait que les lois exponentielles sont des lois à durée de vie sans vieillissement. Ainsi :

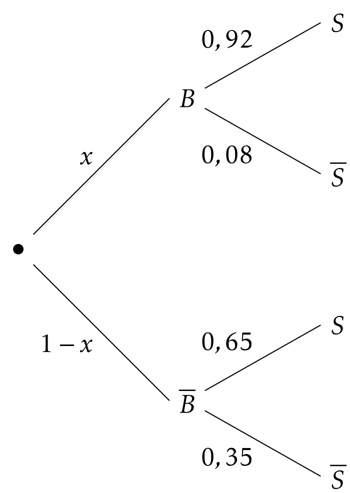
$$\begin{aligned} P_{(X\geq 5)}(X \geq 10) &= P_{(X\geq 5)}(X \geq 5+5) \\ &= P_{(X\geq 0)}(X \geq 5) \\ &= P((X \geq 5)) \\ &= \mathrm{e}^{-5\times 0,25} \approx 0,286 \end{aligned}$$

2 L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 92 % attendent moins de 10 minutes ;
- parmi les clients passant en caisse, 65 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :
B : « le client paye à une borne automatique » ;
$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;
S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».
Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

1 pt **a.** Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.



1.5 pt **b.** m Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?
On cherche x tel que $P(S) \geq 0,75$.
On a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(B \cap S) + P(\overline{B} \cap S) \\ &= 0,92x + 0,65(1-x) \\ &= 0,17x + 0,65 \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} P(S) \geq 0,75 &\iff 0,17x + 0,65 \geq 0,75 \\ &\iff 0,17x \geq 0,10 \\ &\iff x \geq \frac{10}{17} \end{aligned}$$

La proportion minimale de clients devant choisir les caisses automatiques, si on veut que plus de 75 % des clients attendent moins de dix minutes est donc de $\frac{10}{17}$, soit environ 59 %.

Exercice 2 : Malformation cardiaque — 3 points

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %.On considère un échantillon de 400 personnes.

2 pts **1** Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % .
Remarque : l'effectif de la population française est assez grande pour que le tirage de l'échantillon puisse se faire dans les conditions d'application d'une loi binomiale... il faudrait toujours le préciser.
Ici $p = 0.1, n = 400$,donc on a bien $n \geq 30, np \geq 5, n(1-p) \geq 5$ et pour $\alpha = 0,05$, on a $u_\alpha \approx 1,96$.
L'intervalle $\tilde{I_n} = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{pq}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = \left[0,1 - 1,96\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{400}}; 0,1 + 1,96\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{400}}\right]$ de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 est donc environ $[0,07; 0,13]$.

$$\boxed{\text{L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 \% est donc environ } [0,07;0,13].}$$

1 pt **2** Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque detype anévrisme. Qu'en pensez-vous ?

La fréquence observée sur l'échantillon est $f_{Obs} = \dfrac{60}{400} = 0,15$.

Comme $f_{Obs} \notin \tilde{I_n}$, donc au vu de cet échantillon, on remet en cause l'hypothèse affirmant que la proportion de français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %.

Exercice 3 — 7,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln x - x^2 + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

1.5 pt **1** Calculer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.

- En 0^+ : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x^2+1 = 1\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to +0^+} f(x) = -\infty$
- En $+\infty$: on écrit $f(x) = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

  D'après une limite de référence, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 + \dfrac{1}{x^2} = -1\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x^2} = -1$

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} - 1 + \dfrac{1}{x^2} = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

0.5 pt **2** Interpréter graphiquement les résultats précédents.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

1 pt **3** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

$f(x) = \ln x - x^2 + 1$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x}}$$

1.5 pt **4** Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

On étudie le signe de la dérivée :

$$f'(x) = 0 \iff 1 - 2x^2 = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sur $]0;+\infty[$, seul $\frac{\sqrt{2}}{2}$ annule $f'(x)$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
signe de $(1-2x^2)$		$+$	0	-	
signe de x		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	

On déduit le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0	α		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0		$-$	
Variations de f	$-\infty$	0	$\nearrow$	$\frac{1-\ln 2}{2}$	0	$\searrow$	$-\infty$

3 pts **5** Déterminer le nombre de solutions et une valeur exacte ou au moins une valeur approchée de(s) solution(s) de l'équation :

$$\ln x = x^2 - 1$$

Tout d'abord, remarquons que :

$$\ln x = x^2 - 1 \iff \ln x - x^2 + 1 = 0 \iff f(x) = 0$$

- Sur $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$:
  D'après le théorème de la bijection :
  - ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.
  - ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.
  - ✍ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1-\ln 2}{2} \approx 0,15$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
  - ✍ f réalise donc une bijection de $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ sur $\left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$

    Comme $0 \in \left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$, l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Encadrons α. A l'aide d'une calculatrice, on obtient $f(0,45) \approx -0,01$ et $f(0,46) \approx 0,012$.
    Comme $f(0,45) < 0 < f(0,1-46)$ sécrit $f(0,45) < f(\alpha) < f(0,46)$

    $$\boxed{0,45 < \alpha < 0,46}$$

- Sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$: D'après le théorème de la bijection :
  - ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.
  - ✍ f est strictement décroissante sur l' intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.
  - ✍ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1-\ln 2}{2} \approx 0,15$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
  - ✍ f réalise donc une bijection de $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ sur $\left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$

    Comme $0 \in \left]-\infty; \frac{1-\ln 2}{2}\right]$, l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique β dans $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$. Il reste à remarquer que $f(1) = \ln 1 - 1^2 + 1 = 0$, et $1 \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ ainsi $\beta = 1$.

$$\boxed{\text{Conclusion : l'équation : } \ln x = x^2 - 1 \text{ a deux solutions } 1 \text{ et } \alpha \text{ où } 0,45 < \alpha < 0,46.}$$