Nom :	DS 08 CASE DES MATHS	TS3 Mars 2019
Prénom :		Devoir n° 18 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 Quelques intégrales — 5,5 points

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes : 1 pt

$$I=\int_0^1 (x^2+2x+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2+2x\right]_0^1 = \frac{1^3}{3}+1^2+2\times1-\left(\frac{0^3}{3}+0^2+2\times0\right) = \frac{1}{3}++3 = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{I=\frac{10}{3}}$$

1.5 pt

$$J=\int_1^3 (2x-3)^3\,dx$$

On pose $f(x)=(2x-3)^3$ et $u(x)=2x-3$, donc $u'(x)=2$, ainsi $f=\frac{1}{2}u^3u'$, donc une primitive de f est $F=\frac{1}{2}\frac{u^{3+1}}{3+1}=\frac{1}{8}u^4$

$$J=\int_1^3 (2x-3)^3\,dx = \left[\frac{1}{8}(2x-3)^4\right]_1^3 = \frac{1}{8}\left[(2x-3)^4\right]_1^3 = \frac{1}{8}\left[3^4-(-1)^4\right] = \frac{1}{8}\times 80 = 10$$

$$\boxed{J=10}$$

1.5 pt

$$K=\int_{-1}^2 \frac{1}{3x+5}\,dx$$

On pose $f(x)=\frac{1}{3x+5}$ et $u(x)=3x+5$, donc $u'(x)=3$, ainsi $f=\frac{1}{3}\times\frac{u'}{u}$, donc une primitive de f est $F=\frac{1}{3}\ln|u|$

$$K=\int_{-1}^2 \frac{1}{3x+5}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln|3x+5|\right]_{-1}^2 = \frac{1}{3}\left[\ln|3x+5|\right]_{-1}^2 = \frac{1}{3}\left[\ln(11)-\ln(2)\right]$$

$$\boxed{K = \frac{\ln(11) - \ln(2)}{3}}$$

1.5 pt

$$L = \int_{-1}^{1} x e^{3x^2-1}\,dx$$

On pose $f(x) = xe^{3x^2-1}$ et $u(x) = 3x^2 - 1$, donc $u'(x) = 6x$, ainsi $f = \frac{1}{6} \times u'e$, donc une primitive de f est $F = \dfrac{1}{6}e^u$

$$\begin{aligned} L = \int_{-1}^{1} x e^{3x^2-1}\,dx \quad &= \left[\frac{1}{6}e^{3x^2-1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{6}\left[e^{3x^2-1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{6}\left[e^2 - e^2\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{L = 0}$$

Exercice 2 — 3,5 points

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)}$.

1.5 pt **1** Déterminer les nombres réels a et b tels que l'on ait, pour tout $x > 1$: $g(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.

On réduit $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$ au même dénominateur :

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{b(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a}{(x-1)(x+1)} + \frac{bx+b}{(x-1)(x+1)}$$
$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+bx+b}{(x-1)(x+1)}$$
$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{(a+b)x+(b-a)}{x^2-1}$$

Comme $g(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)} = \dfrac{(a+b)x+(b-a)}{x^2-1}$.

On a en identifiant les polynômes du numérateur :

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ b-a = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}.}$$

1.5 pt **2** Trouver une primitive H de g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

On utilise le fait que $\dfrac{u'}{u}$ a pour primitives $\ln|u| + C$.

$$\boxed{\text{Ainsi } H(x) = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C}$$

0.5 pt **3** Déterminer la primitive G de g qui vérifie $G(2) = 0$.

$G(2) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 + C = 0$

Soit $C = -\frac{1}{2}\ln 3$

Conclusion : La primitive de g qui vérifie $G(2) = 0$ est donc la fonction définie par

$$G(x) = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(3)$$

Soit comme ici $x > 1$

$$\boxed{G(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(3)}$$

Exercice 3 — 2,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)e^{2x}$.

2 pts **1** Montrer qu'il existe une primitive F de f de la forme $F(x) = (ax+b)e^{2x}$ .Déterminer les nombres réels a et b .

F est une primitive de f ssi $F' = f$;

$F = uv$ donc $F' = u'v + v'u$.

$$\begin{cases} u(x) & = & ax+b \\ v(x) & = & e^{2x} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} u'(x) & = & a \\ v'(x) & = & 2e^{2x} \end{cases}$$

Ainsi $F'(x) = ae^{2x} + (ax+b)\times 2e^{2x}$

$F'(x) = ae^{2x} + (2ax+2b)e^{2x} = (2ax + (2b+a))\,e^{2x}$

Comme $f(x) = (2x+1)e^{2x}$

En identifiant les termes de même degré, il vient :

$$\begin{cases} 2a & = & 2 \\ 2b+a & = & 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & 1 \\ 2b & = & 1-a=0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } F(x) = xe^{2x} \text{ est donc une primitive de } f.}$$

0.5 pt **2** Déterminer la primitive G de f qui vérifie $G(0) = 0$.

Les fonctions G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = xe^{2x} + C$ sont les primitives de f.

$G(0) = 0 \Longleftrightarrow 0e^0 + C \Longleftrightarrow C = 0$

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } G(x) = xe^{2x} \text{ est donc la primitive de } f \text{ qui vérifie } G(0) = 0.}$$

Exercice 4 — 0 point

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

1 En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite (I_n).

Les fonctions f_n sont continues et positives sur $[0;\ 1]$, donc I_n est l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La suite (I_n) semble, au vu du graphique, croissante majorée par 1, laire du carré de côté 1.
On conjecture donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 1$.

2 Calculer la valeur exacte de I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= [\ln|1+x|]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = \ln 2.}$$

3 **a.** Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$ On a pour tout réel x de de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$\begin{array}{ll} 0 \leq x \leq 1 & \\ 0 \leq x^n \leq 1 & \text{car } x \mapsto x^n \text{ est strictement croissante sur } [0\,;\,1] \\ 1 \leq 1 + x^n \leq 2 & \text{en ajoutant 1 ...} \\ 1 \geq \dfrac{1}{1+x^n} \geq \dfrac{1}{2} & \text{car } x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[\end{array}$$

Ainsi pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

On a pour tout réel x de de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1 \\ \int_0^1 \left(\dfrac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\mathrm{d}x \quad \text{car } 0 < 1 \text{ en intégrant l'inégalité précédente} \\ \int_0^1 \left(\dfrac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x \leq [x]_0^1 \\ I_n \leq 1 \end{array}$$

4 Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

On a pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^n}-(1-x^n) &= \frac{1}{1+x^n}-\frac{(1-x^n)(1+x^n)}{1+x^n}\\ &= \frac{1-\left(1-x^{2n}\right)}{1+x^n}\\ &= \frac{x^{2n}}{1+x^n}\end{aligned}$$

Or ici $x\in[0;1]$ d'où $\left.\begin{array}{l} x^{2n}\geq 0\\ 1+x^n>0\end{array}\right\}$ par quotient on obtient : $\dfrac{x^{2n}}{1+x^n}\geq 0$

comme $\dfrac{1}{1+x^n}-(1-x^n)\geq 0$, on déduit : $1-x^n\leqslant\dfrac{1}{1+x^n}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

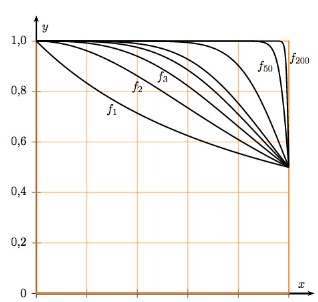
5 Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x &= \left[x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\\ &= 1-\frac{1^{n+1}}{n+1}-0\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

6 À l'aide des questions précédentes, encadrer I_n pour tout entier naturel $n\geq 1$, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
On a pour tout réel x de de l'intervalle $[0\,;1]$:

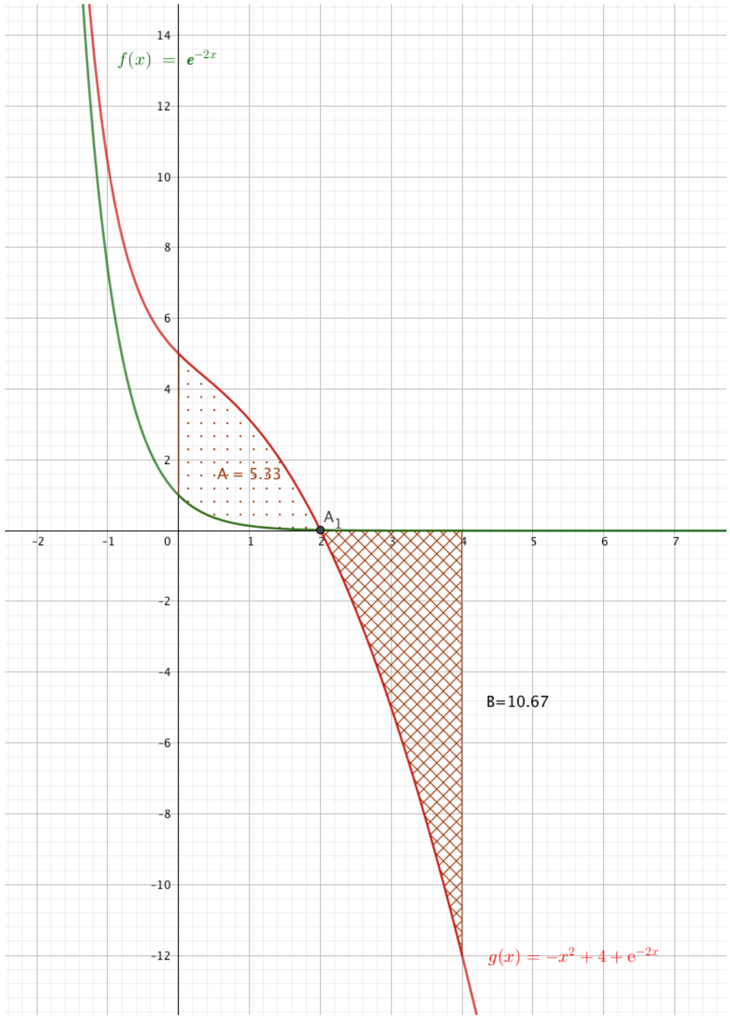
$$\begin{array}{llll} 1-x^n & \leq\dfrac{1}{1+x^n} & \leq 1 & \\ \int_0^1 (1-x^n)\mathrm{d}x & \leq\int_0^1\left(\dfrac{1}{1+x^n}\right)\mathrm{d}x & \leq\int_0^1 1\mathrm{d}x & \text{car } 0< 1 \text{ en intégrant l'inégalité précédente}\\ 1-\dfrac{1}{n+1} & \leq I_n & \leq 1 & \text{calculs précédents}\end{array}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to+\infty} 1=1$; d'après le théorème des gendarmes, on conclut : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n=1$



Exercice 5 — 4 points

Le but de l'exercice est de justifier deux calculs d'aire obtenus de façon approchée à l'aide d'un logiciel.



On note f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$ et $g(x) = -x^2 + 4 + e^{-2x}$.

1 pt **1** Etudier la position relative des courbes C_f et C_g.
On étudie le signe de

$$\begin{aligned} y_{C_f} - y_{C_g} &= f(x) - g(x) \\ &= e^{-2x} - \left(-x^2 + 4 + e^{-2x}\right) \\ &= x^2 - 4 \\ &= (x-2)(x+2) \end{aligned}$$

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ on forme $f(x) - g(x) = y_{\mathcal{C}_f} - y_{\mathcal{C}_g}$, où $\mathcal{C}_f$ est la courbe d'équation $y = f(x)$ et $\mathcal{C}_g$ la courbe d'équation $y = g(x)$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $f(x) - g(x) = y_{\mathcal{C}_f} - y_{\mathcal{C}_g}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathcal{C}_f$ au -dessus de $\mathcal{C}_g$	$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun	$\mathcal{C}_f$ en-dessous de $\mathcal{C}_g$	$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun	$\mathcal{C}_f$ au -dessus de $\mathcal{C}_g$	

3 pts **2** Calculer la valeur exacte de l'aire des deux domaines représentés ci-dessus.

- Notons E_1 l'aire du domaine défini par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$.
  En effet $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[0\,;2]$.
  Son aire vaut :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx \\ &= \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 8 - \frac{2^3}{3} \\ &= \frac{16}{3} \\ &\approx 5.33 \end{aligned}$$

- Notons E_2 l'aire du domaine défini par $\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$.
  En effet $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[2\,;4]$.
  Son aire vaut :

$$\begin{aligned} B &= \int_2^4 (f(x) - g(x))\,dx \\ &= \int_2^4 \left(x^2 - 4\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^4 \\ &= \frac{4^3}{3} - 16 \\ &= \frac{64}{3} - \frac{48}{3} - \left(\frac{8}{3} - \frac{24}{3}\right) = \frac{32}{3} \\ &\approx 10.67 \end{aligned}$$

Exercice 6 : Un Vrai-Faux — 4 points

Pour chaque affirmation proposée, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.
Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[0;+\infty[$, et soit F et G les fonctions définies $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ et $G(x) = x\int_1^x f(t)\,dt$. Soit de plus $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1 pt **1** $G(0) = G(1)$

Tout d'abord signalons que F et G sont bien définies car la fonction f est continue sur $[0;+\infty[$.
$G(x) = 0 \times \int_1^0 f(t)\,dt = 0$ et $F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$

$\boxed{G(0) = G(1) = 0\text{, et donc l'affirmation est vraie.}}$

1 pt **2** G est dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $G'(x) = F(x) + xf(x)$.
Comme f est continue sur $[0;+\infty[$, d'après le théorème fondamental sur le calcul intégral ; F est la primitive de

f qui s'annule en1.
Donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $F'(x) = f(x)$.
En conséquence, G est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$. $G = uv$, d'où $G' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= x \\ v(x) &= F(x) \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= f(x) \end{cases}$

$$\begin{aligned} G'(x) &= 1 \times F(x) + x \times f(x) \\ &= F(x) + xf(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{G'(x) = F(x) + xf(x), \text{ et donc l'affirmation est vraie.}}$$

1 pt **3** On ne peut pas prévoir le sens de variation de G avec les seules informations de l'énoncé.
Effectivement, étudier le sens de variation de G revient à étudier le signe de sa dérivée.
On a vu que $G'(x) = F(x) + xf(x)$.
Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $x \geq 0$ et $f(x) > 0$, par ailleurs comme $F'(x) = f(x)$, on peut dresser le tableau de variation de F et en déduire le signe de F :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$		$+$	
Variations de F	↗		0	↗	
Signe de $F(x)$		-	0	$+$	

Ainsi sur $[1;+\infty[$, on a $xf(x) > 0$ et $F(x) > 0$, la somme de 2 réels positifs étant positifs, on déduit que $G'(x) > 0$ sur $[1;+\infty[$.
On a donc prouvé que G est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
Par contre on ne peut pas conclure sur $[0;1]$, car $G'(x)$ et la somme de $F(x) \leq 0$ et $xf(x) \geq 0$ ...

1 pt **4** L'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$ se calcule par $F(2)+F(0)$.

La fonction f est continue et positive sur $[0;+\infty[$, donc l'aire du domaine délimitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$ vaut :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$F(2) - F(0) = F(2) + F(0) \iff F(0) = 0$$

Par ailleurs $F(0) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
f étant continue sur 0;1], elle admet un minimum en un réel $x_0 \in [0;1]$ sur cet intervalle. Par ailleurs, comme f est strictement positive, on déduit :

Pour tout t de $[0;1]$, $f(t) \geq f(x_0) > 0$, puis en intégrant de 0 à 1 (0<1); $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt > \int_0^1 f(x_0)\,dt$.
Soit $F(0) > f(x_0) > 0$. Ainsi $F(0) \neq 0$ et donc $\mathcal{A} \neq F(2) + F(0)$

$$\boxed{\mathcal{A} \neq F(2) + F(0), \text{ et donc l'affirmation est fausse.}}$$