

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention! Le sujet est sur 3 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Un échauffement?

3 points

- 0.5 pt **1** Quelle est la partie réelle du nombre complexe $z = (2 + i)^2$?
- 0.5 pt **2** Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe $z = (1 - i)^2$?
- 0.5 pt **3** Calculer le module du nombre complexe $z = 4 + 3i$.
- 0.5 pt **4** Calculer un argument du nombre complexe $z = 2 - 2i$.
- 0.5 pt **5** Si $z = 2 - 5i$ alors que vaut \bar{z} ?
- 0.5 pt **6** Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$. Donner la forme algébrique de z .

Exercice 2 : Équation du 3e degré

6 points

On pose pour tout nombre complexe z , $f(z) = z^3 - (4\sqrt{3} + i)z^2 + 4(4 + i\sqrt{3})z - 16i$.

- 1 pt **1** Montrer que $f(i) = 0$;
Que peut-on en déduire pour $f(z)$? (On citera le théorème utilisé)
- 1 pt **2 a.** Montrer que $f(z) = (z - i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16)$.
- 1 pt **2 b.** En déduire les trois solutions de l'équation $f(z) = 0$.
- 2 pts **3 a.** Déterminer la forme exponentielle des trois solutions de l'équation $f(z) = 0$.
- 1 pt **3 b.** Représenter, au compas et à la règle non graduée, les trois points A, B, C dont les affixes sont les solutions de $f(z) = 0$ sur l'annexe 1 (on laissera les traits de construction).

Exercice 3

4.5 points

On donne $z_0 = \sqrt{3} - i$ et $z_1 = (1 + i)z_0$.

- 1 pt **1** Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- 1.5 pt **2** Déterminer la forme trigonométrique de z_0 et de $1 + i$.
- 1 pt **3** En déduire la forme trigonométrique de z_1 .
- 1 pt **4** Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

 Exercice 4

9,5 points

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2}$$

et \mathcal{F} sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 2 pts **1** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- 2 pts **2** Etudier les variations de f .
- 0.5 pt **3** Montrer que \mathcal{F} admet une asymptote horizontale \mathcal{D} en $+\infty$ dont on précisera une équation.
- 2 pts **4** Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote \mathcal{D} .
- 2 pts **5** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha = 1$
- 1 pt **6** En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

 Exercice 5

5 points

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par :

$$f(x) = e \ln x - x.$$

- 1 pt **1** Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
- 1 pt **2** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2 pts **3** Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f . Dresser un tableau de variations de f .
- 1 pt **4** Calculer $f(\pi)$. Comparer alors les nombres π^e et e^π .

Nom :

Prénom :

DS 05



GM
CASE DES MATHS

TS3

03/04/2019



Janv. 2019



Devoir n° 14

.../...

A rendre avec la copie!

