Nom :	**DS 05**	TS3 — *Janv. 2019*
Prénom :	CASE DES MATHS	*Devoir n° 14* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 3 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Un échauffement ? — *3 points*

0.5 pt **1** Quelle est la partie réelle du nombre complexe $z = (2+\mathrm{i})^2$?
On a

$$\begin{aligned} z = (2+\mathrm{i})^2 &= 4 + 2\times 2\times \mathrm{i} +^2 \\ &= 4 + 4\mathrm{i} - 1 \\ &= 3 + 4\mathrm{i} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La partie réelle du nombre complexe } z = (2+\mathrm{i})^2 \text{ est 3.}}$

0.5 pt **2** Quelle est la partie imaginaire du nombre complexe $z = (1-\mathrm{i})^2$?
On a

$$\begin{aligned} z = (1-\mathrm{i})^2 &= 1 - 2\times \mathrm{i} +^2 \\ &= 1 - 2\mathrm{i} - 1 \\ &= -2\mathrm{i} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La partie imaginaire du nombre complexe } z = (1-\mathrm{i})^2 \text{ est -2.}}$

0.5 pt **3** Calculer le module du nombre complexe $z = 4 + 3\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{4^2+3^2} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le module du nombre complexe } z = 4 + 3\mathrm{i} \text{ est 5.}}$

0.5 pt **4** Calculer un argument du nombre complexe $z = 2 - 2\mathrm{i}$.

Module	**Argument**
$\begin{aligned} \lvert z\rvert &= \sqrt{x^2+x^2} \\ &= \sqrt{2^2+2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$ convient

$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$$

0.5 pt **5** Si $z = 2 - 5\mathrm{i}$ alors que vaut $\overline{z}$?

$\boxed{\text{Si } z = 2 - 5\text{i alors que vaut } \overline{z} = 2 + 5\text{i .}}$

0.5 pt **6** Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$. Donner la forme algébrique de z.

$$\begin{aligned} z &= 2\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 1 + i\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La forme algébrique de } z \text{ est } z = 1 + i\sqrt{3}.}$

Exercice 2 : Équation du 3e degré — 6 points

On pose pour tout nombre complexe z, $f(z) = z^3 - (4\sqrt{3} + i)z^2 + 4(4 + i\sqrt{3})z - 16i$.

1 pt **1** Montrer que $f(i) = 0$;
Que peut-on en déduire pour $f(z)$? (On citera le théorème utilisé)

$$\begin{aligned} f(i) &= i^3 - (4\sqrt{3} + i)i^2 + 4(4 + i\sqrt{3})i - 16i \\ &= -i - 4\sqrt{3} + i + 16i + 4i^2\sqrt{3} - 16i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{f(i) = 0, \text{ donc le polynôme } f(z) \text{ se factorise par } (z - i).}$

1 pt **2** **a.** Montrer que $f(z) = (z - i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16)$.
On développe :

$$\begin{aligned} (z - i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) &= z^3 - 4\sqrt{3}z^2 + 16z \\ &\quad + iz^2 + 4i\sqrt{3}z - 16i \\ &= z^3 - (4\sqrt{3} + i)z^2 + 4(4 + i\sqrt{3})z - 16i \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien } f(z) = (z - i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16).}$

1 pt **b.** En déduire les trois solutions de l'équation $f(z) = 0$.

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\iff (z - i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) \\ &\iff z = i \textbf{ ou } z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \end{aligned}$$

Résolution de $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$:
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 16 = 3 \times 16 - 4 \times 16 = -16$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation a deux racines complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} & z_2 &= \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{4\sqrt{3} + 4i}{2} & &= 2\sqrt{2} - 2i \\ &= 2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

$\boxed{\text{En conclusion léquation } f(z) = 0 \text{ a trois solutions : } \mathcal{S} = \{i ; 2\sqrt{3} + 2i ; 2\sqrt{3} - 2i\}.}$

2 pts **3** **a.** Déterminer la forme exponentielle des trois solutions de l'équation $f(z) = 0$.

- On a évidemment $z_0 = i = \mathbf{e}^{i\frac{\pi}{2}}$
-

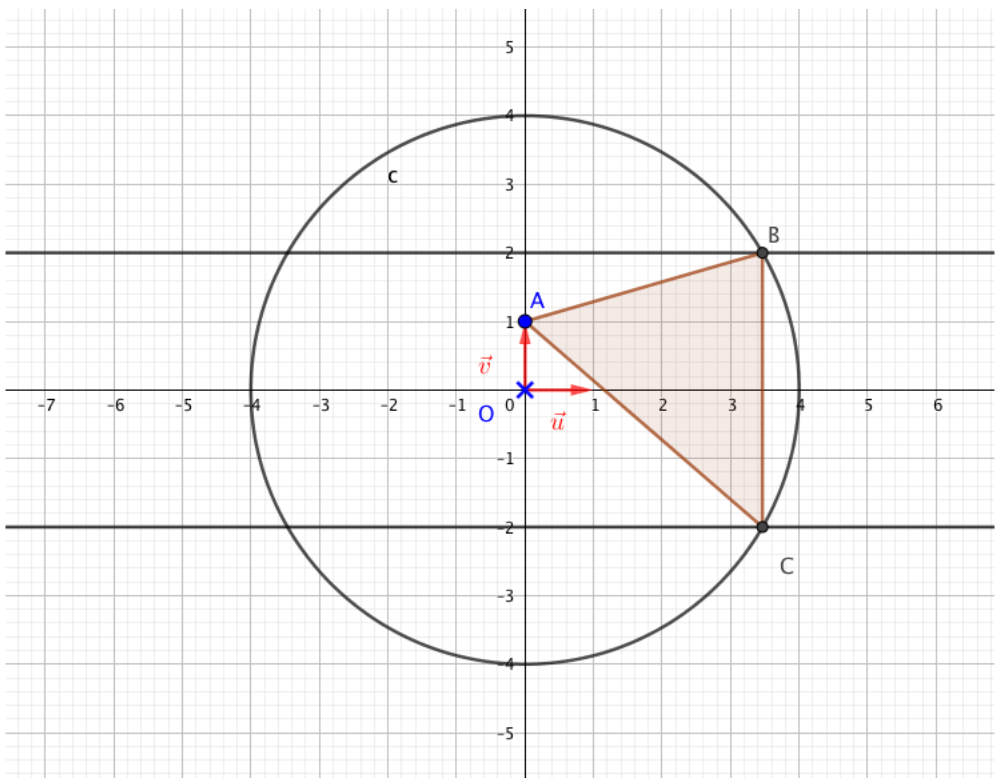
Module	**Argument**
$\begin{aligned} \lvert z_1 \rvert &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{12+4} = \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} &= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient

$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}}$$

- $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i = \overline{z_1}$, comme $z_1 = 4\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, on déduit $z_2 = 4\mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$\boxed{z_0 = i = \mathbf{e}^{i\frac{\pi}{2}}\ ;\ z_1 = 4\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_2 = 4\mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{3}}.}$$

1 pt **b.** Représenter, au compas et à la règle non graduée, les trois points A, B, C dont les affixes sont les solutions de $f(z) = 0$ sur l'annexe 1 (on laissera les traits de construction).



- La construction de A est aisée.
- Construction de B : comme $z_B = 4\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, on a $|z_B| = OB = 4$, donc le point B est sur le cercle Γ de centre O de rayon 4.
  Par ailleurs $\mathfrak{Re}(z_B) = 2$, donc le point B se trouve sur la droite Δ verticale, d'équation $x = 2$.
  Γ et Δ ont deux points d'intersection, l'un d'ordonnée positive ; c'est B et l'autre d'ordonnée négative ; c'est C.

Exercice 3 — *4,5 points*

On donne $z_0 = \sqrt{3} - i$ et $z_1 = (1+i)z_0$.

1 pt **1** Déterminer la forme algébrique de z_1.

$z_1 = (1+\mathrm{i}) \times (\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1)$;

$$\boxed{z_1 = 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1).}$$

1.5 pt **2** Déterminer la forme trigonométrique de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.

Pour $\mathbf{z_0}$:
$|z_0| = 2$.
Recherche d'un argument de z_0 : Notons θ_0 un argument de z_0.
$$\begin{cases} \cos\theta_0 = \dfrac{\operatorname{Re}(z_0)}{|z_0|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_0 = \dfrac{\operatorname{Im}(z_0)}{|z_0|} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$
On en déduit que

$$\boxed{\theta_0 = -\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{\text{D'où : } z_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.}$$

Pour $\mathbf{1} + \mathrm{i}$:
$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.
Il est clair, géométriquement, que $\arg(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$.
En déduire la forme trigonométrique de z_1. On en déduit que

$$\boxed{1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.}$$

1 pt **3** Endéduire la forme trigonométrique de z_1.

- Module :$|z_1| = |(1+\mathrm{i})z_0| = |1+\mathrm{i}| \times |z_0| = 2\sqrt{2}2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$
- Argument : $\arg(z_1) = \arg((1+\mathrm{i})z_0) = \arg(1+\mathrm{i}) + \arg(z_0) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.
  Par conséquent :

$$\boxed{z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$$

On peut faire les deux en même temps :

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)z_0 \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

1 pt **4** Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

D'où, par identification des parties réelles :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

Exercice 4 — 9,5 points

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$$

et $\mathcal{F}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

2 pts **1** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Limite en $+\infty$:

Pour $x > 0$ on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = 0 \text{ Limite de référence}\end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

Limite en 0^+ :

Pour $x > 0$ on a $f(x) = \dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2} = \left(1-x^2-\ln x\right)\times\dfrac{1}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \text{Comme } \displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \text{ Limite de référence } \lim_{x\to0^+} \left(1-x^2-\ln x\right) = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \text{ donc la droite d'équation } x = 0 \text{ est asymptote verticale à } \mathcal{F}\ .}$$

2 pts **2** Etudier les variations de f .

Dérivée : Les fonctions $u : x \mapsto 1-x^2-\ln x$ et $v : x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et $f = \dfrac{u}{v}$ donc, par théorème sur les quotients de fonctions dérivables on a f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ ce qui donne :

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3+2\ln x}{x^3}}$$

Signe de la dérivée : comme on travaille sur $]0;+\infty[$ on a $x > 0$ donc $x^3 > 0$, ainsi $f'(x)$ a le signe de $-3+2\ln x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3+2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -3+2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{e^3}$, car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. et voici le tableau de variation de la fonction f :

On déduit le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	$-1-\frac{1}{2}e^{-3}$	$\nearrow$	-1

$$
\begin{aligned}
f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{1-\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2-\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2} \\
&= \frac{1-e^3-\frac{3}{2}}{e^3} && \textbf{car } \ln(e^t)=t \\
&= \left(-e^3-\frac{1}{2}\right)e^{-3} && \textbf{car } \tfrac{1}{e^t}=e^{-t} \\
&= -1-\tfrac{1}{2}e^{-3}
\end{aligned}
$$

0.5 pt **3** Montrer que $\mathcal{F}$ admet une asymptote horizontale $\mathcal{D}$ en $+\infty$ dont on précisera une équation.

> Ayant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, on déduit que $\mathcal{F}$ admet une asymptote horizontale $\mathcal{D}$ d'équation $y = -1$.

2 pts **4** Etudier la position relative de la courbe et de son asymptote $\mathcal{D}$.
On étudie le signe de $y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}}$

$y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}} = f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2} + 1 = \dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Comme x^2 sur $]0;+\infty[$; on déduit que $y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}}$ a le signe de $1-\ln x$.

$y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$y_{\mathcal{F}} - y_{\mathcal{D}} > 0 \Leftrightarrow 1-\ln x > 0 \Leftrightarrow -\ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

$\mathcal{F}$ est située au dessus de son asymptote $\mathcal{D}$ sur $]0;e[$.

$\mathcal{F}$ est située en dessous de son asymptote $\mathcal{D}$ sur $]e;+\infty[$.

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$ ont un seul point commun $A(e;-1)$

2 pts **5** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha = 1$

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I =]0;e^{\frac{3}{2}}]$.
- ✍ f est strictement décroissante sur l' intervalle $I =]0;e^{\frac{3}{2}}]$.
- ✍ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -1-\frac{1}{2}e^{-3}$
- ✍ f réalise donc une bijection de $I =]0;e^{\frac{3}{2}}]$ sur $\left[-1-\frac{1}{2}e^{-3};+\infty\right[$

  Comme $0 \in \left[-1-\frac{1}{2}e^{-3};+\infty\right[$].5;.4[, l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $]0;e^{\frac{3}{2}}]$.

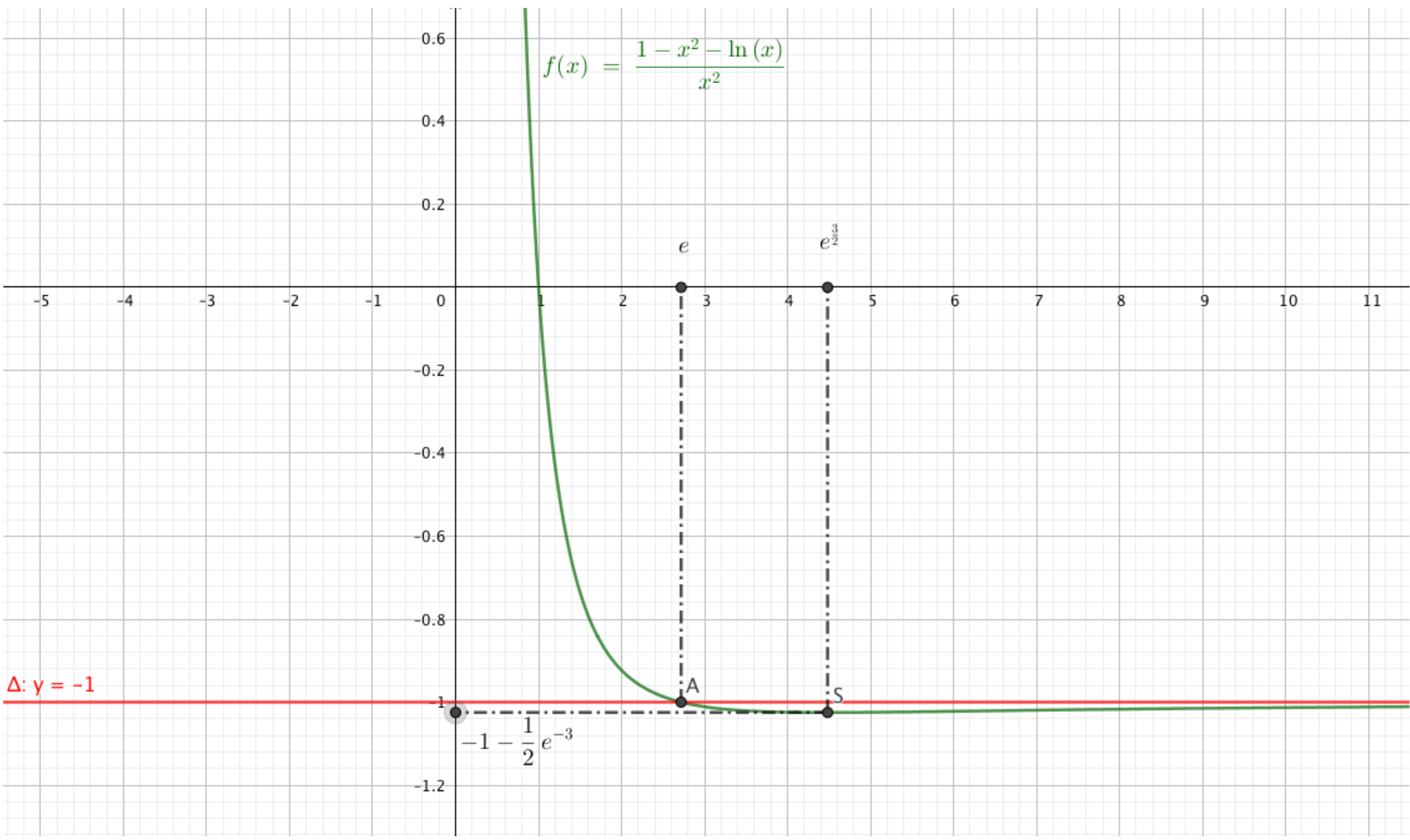
Il suffit alors de calculer $f(1) = \dfrac{1-1^2-\ln 1}{1^2} = 0$ car $\ln 1 = 0$.

> Donc l 'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha = 1$

1 pt **6** En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$-$			
Variations de f	‖	↘	0	↘	$-1-\frac{1}{2}e^{-3}$	↗	-1
Signe de $f(x)$	‖	$+$	0	-		-	

Une courbe non demandée, pour illustrer l'exercice :



Exercice 5 **5 points**

1 pt **1** On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} (\mathrm{e}\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0\end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$$

1 pt **2** On peut écrire :

$$f(x) = x\left(\mathrm{e}\frac{\ln x}{x} - 1\right).$$

On sait que (croissance comparée) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}\ln x}{x} - 1\right) = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2 pts **3** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} - 1 = \dfrac{\mathrm{e} - x}{x}$.
Comme on travaille sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$, on a $x > 0$, et donc $f'(x)$ a le signe de $\mathrm{e} - x$.
Ainsi, sur $]0\,;\mathrm{e}[$, $f'(x) > 0$ et sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

1 pt **4** On remarque sur le tableau précédent que pour tout réel x strictement positif et différent de e, $f(x) < 0$. Ainsi :

$$f(\pi) < 0$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{e}\ln\pi < \pi$$

soit :

$$\ln\pi^{\mathrm{e}} < \pi.$$

En composant par la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, on a alors :

$$\mathrm{e}^{\ln\pi^{\mathrm{e}}} < \mathrm{e}^{\pi},$$

Soit :

$$\boxed{\pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi}}$$