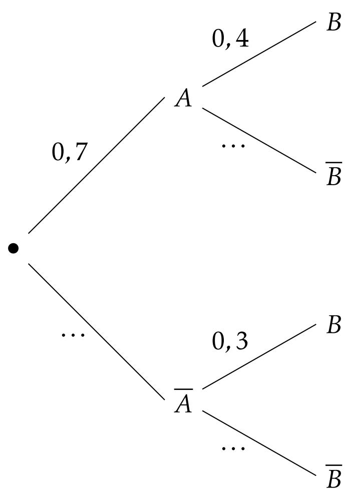
Nom :	**DS 04**	TS3 — Déc. 2018
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 13 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 3 pages (recto-verso).

Exercice 1 — *4 points*

Dans une population donnée, on étudie des caractères génétiques de deux sortes, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.
On choisit au hasard une personne dans la population. On note A l'événement « la personne possède le caractère $\mathscr{A}$ » et B l'événement « la personne possède le caractère $\mathscr{B}$ ».
Claire a construit l'arbre suivant :



1 pt **1** Compléter l'arbre de probabilités ci-dessus.

2 pts **2** **a.** Trouver $p(B)$ et $p\left(\overline{B}\right)$

1 pt **b.** Quelle est la probabilité qu'une personne ne possède pas le caractère $\mathscr{A}$ sachant qu'elle possède le caractère $\mathscr{B}$?

Exercice 2 — *6,5 points*

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.
On définit les événements suivants :
R : « la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » ;
J : « la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus » ».

Partie A

1 pt **1** Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2 pts **2** Déterminer la valeur exacte de x.

1 pt **3** Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot. On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1 pt **1** Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On se justifiera et on donnera les paramètres de cette loi.

1.5 pt **2** Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Exercice 3 — 6 points

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1.5 pt Question 1 : A, B et C sont trois événements tels que :

$$A \text{ et } B \text{ sont incompatibles, } B \text{ et } C \text{ sont indépendants, } P(A) = P(B) = P(C) = 0,4.$$

Affirmation 1 : $P(A \cup B) = 0,8$ et $P(B \cup C) = 0,8$.

1.5 pt Question 2 : Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles de même centre et de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres. On suppose que le tireur atteint toujours la cible et on désigne par p_1, p_2 et p_3 les probabilités d'atteindre respectivement le disque central, la couronne comprise entre les cercles de rayons 10 et 20 centimètres et la couronne la plus éloignée du centre. On suppose, de plus, que p_1, p_2 et p_3 sont proportionnelles aux aires des zones auxquelles elles correspondent.

Affirmation 2 : La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à $\dfrac{5}{9}$.

Aide :on rappelle que l'aire d'un disque de rayon r est $\pi . r^2$; on pourra montrer d'abord que

$$p_1 = \frac{p_2}{3} = \frac{p_3}{5}.$$

1.5 pt Question 3 : On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.
Affirmation 3 : La probabilité qu'au moins un des appareils tombe en panne durant la période de garantie est égale à 0,8 à 10^{-1} près.

1.5 pt Question 4 : Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\dfrac{9}{10}$. Je sais que ce soir je vais sortir mon chien.

Affirmation 4 : La probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à $\dfrac{27}{40}$.

Exercice 4 — 13,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1.5 pt **1** Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
Pour le calcul de la limite en $+\infty$, on utilisera la propriété :
pour tout entier naturel n; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

1.5 pt **2** Montrer que $g'(x) = (x-2)^2\mathrm{e}^{-x}$ et déterminer son signe.

1 pt **3** En déduire le tableau de variation de g.

2 pts **4** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que

$$0,35 \leqslant \alpha \leqslant 0,36.$$

0.5 pt **5** En déduire le signe de g.

Partie II : Étude de f

1 pt **1** Calculer la limite de f en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

1.5 pt **2** Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.

1 pt **3** En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.

1 pt **4** **a.** Démontrer que :

$$f(\alpha) = \alpha\left(1 + 2\mathrm{e}^{-\alpha}\right).$$

1.5 pt **b.** Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\left(1 + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$ est strictement croissante sur $[0;1]$.

0.5 pt **c.** À l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 3×10^{-2} .

1 pt **5** Donner une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.