Nom : .... *Prénom :*	**DS 03** CASE DES MATHS	TS3 *Nov. 2018* *Devoir n° 11* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 4 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Equations — 3 points

Résoudre les équations suivantes :

1.5 pt **1** $e^{x^2+2x} = e$

$$\begin{aligned} e^{x^2+2x} = e &\iff e^{x^2+2x} = e^1 \\ &\iff x^2 + 2x = 1 \\ &\iff x^2 + 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 = 8$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1+\sqrt{2} ; -1-\sqrt{2}\}}$$

1.5 pt **2** $e^{3x^2} = e^{5x-1}$.

$$\begin{aligned} e^{3x^2} = e^{5x-1} &\iff 3x^2 = 5x - 1 \\ &\iff 3x^2 - 5x + 1 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 12 = 13$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{13}}{6} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{5+\sqrt{13}}{6} ; \frac{5-\sqrt{13}}{6}\}}$$

Exercice 2 : Inéquations — 3 points

Résoudre les inéquations :

1.5 pt **1** $e^x > e^{1-x}$

$$\begin{aligned} e^x > e^{1-x} &\iff x > 1-x \\ &\iff 2x > 1 \\ &\iff x > \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} =]\tfrac{1}{2};+\infty[}$$

1.5 pt **2** $e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$

$$\begin{aligned} e^x - \frac{1}{e^x} > 0 &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff x > -x \\ 0 &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} =]0;+\infty[}$$

Exercice 3 — *14 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{x+1}{e^x - x}.$$
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.
Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

2.5 pts **1** Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On calculera les limites aux bornes.

- Dérivée : g est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

  $$g = uv - 1$$

  Ainsi $g' = u'v + v'u$.
  Pour tout réel x : $\begin{cases} u(x) &= x \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

  $$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times e^x + e^x \times x \\ &= (1+x)e^x \end{aligned}$$

- Signe de la dérivée : La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $g'(x)$ a :le signe de $x+1$.

  $$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff x+1 = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff x+1 > 0 \\ &\iff x > -1 \end{aligned}$$

- Limites aux bornes :
  ♡ En $+\infty$:
  $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x &= +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^x &= +\infty \end{aligned}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty \text{ puis } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

♡ En $-\infty$:
D'après une limite usuelle : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

2 Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	$\searrow$	$-1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

2.5 pts **3** Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

- Sur $I=[-1;+\infty[$: D'après le théorème de la bijection :
  - ✍ g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I=[-1;+\infty[$.
  - ✍ g est strictement croissante sur l' intervalle $I=[-1;+\infty[$.
  - ✍ $g(-1)=-1-e^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
  - ✍ g réalise donc une bijection de $[-1;.+\infty[$ sur $\left[-1-e^{-1};+\infty\right[$
    Comme $0\in\left[-1-e^{-1};+\infty\right[$, l'équation $g(x)=0$ a une racine unique α dans $[-1;+\infty[$.
- Sur $J=]-\infty;-1]$, on a : $\left.\begin{array}{l} x<0 \\ e^x>0 \end{array}\right\}$ Par produit $xe^x<0$ puis en ajoutant -1, $xe^x-1<-1<0$.
  Ainsi $g(x)<0$ sur $J=]-\infty;-1]$, donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution sur $J=]-\infty;-1]$.

1 pt **4** Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
Avec une calculatrice, on obtient $g(0,56)\approx-0,02$ et $g(0,57)\approx 0,008$.

$$\boxed{0,56<\alpha<0,57}$$

1 pt **5** Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	-1		α		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$		$+$	
Variations de g	$-1-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		-	0	$+$	

Par ailleurs on a montré que $g(x)<0$ sur $J=]-\infty;-1]$. On déduit le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $g(x)$		-	0	$+$	

Partie B :

2 pts **1** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

- En $-\infty$: on débouche sur la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
  On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{e^x - x} \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{e^x}{x}-1\right)} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Par produit } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \left(1+\tfrac{1}{x}\right) &= 1 \\ \lim_{x\to-\infty} \left(\tfrac{e^x}{x}-1\right) &= -1 \end{aligned}\right\} \text{ Par quotient } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1}$$

- En $+\infty$: on débouche sur la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
  On écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{e^x - x} \\ &= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} \\ &= \frac{x}{e^x} \times \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} \end{aligned}$$

D'après une limite de référence on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; par inverse, on déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{x}\right) &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \left(1-\tfrac{x}{e^x}\right) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Par quotient } \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{e^x}\right)} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Par produit } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

1 pt **2** Interpréter graphiquement les résultats précédents.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, donc la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

1.5 pt **3** Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f. On montrera que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= x+1 \\ v(x) &= e^x - x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^x - 1 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 \times (\mathrm{e}^x - x) - (\mathrm{e}^x - 1)(x+1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x - x - (x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x - x - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + x + 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \\
&= \frac{-x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \\
&= -\frac{x\mathrm{e}^x - 1)}{(\mathrm{e}^x - x)^2} \\
&= -\frac{g(x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}
\end{aligned}
$$

1.5 pt **4** Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
Le dénominateur est le carré d'un réel non nul, il est donc strictement positif, ainsi, $f'(x)$ a le signe de $-g(x)$,
On déduit le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

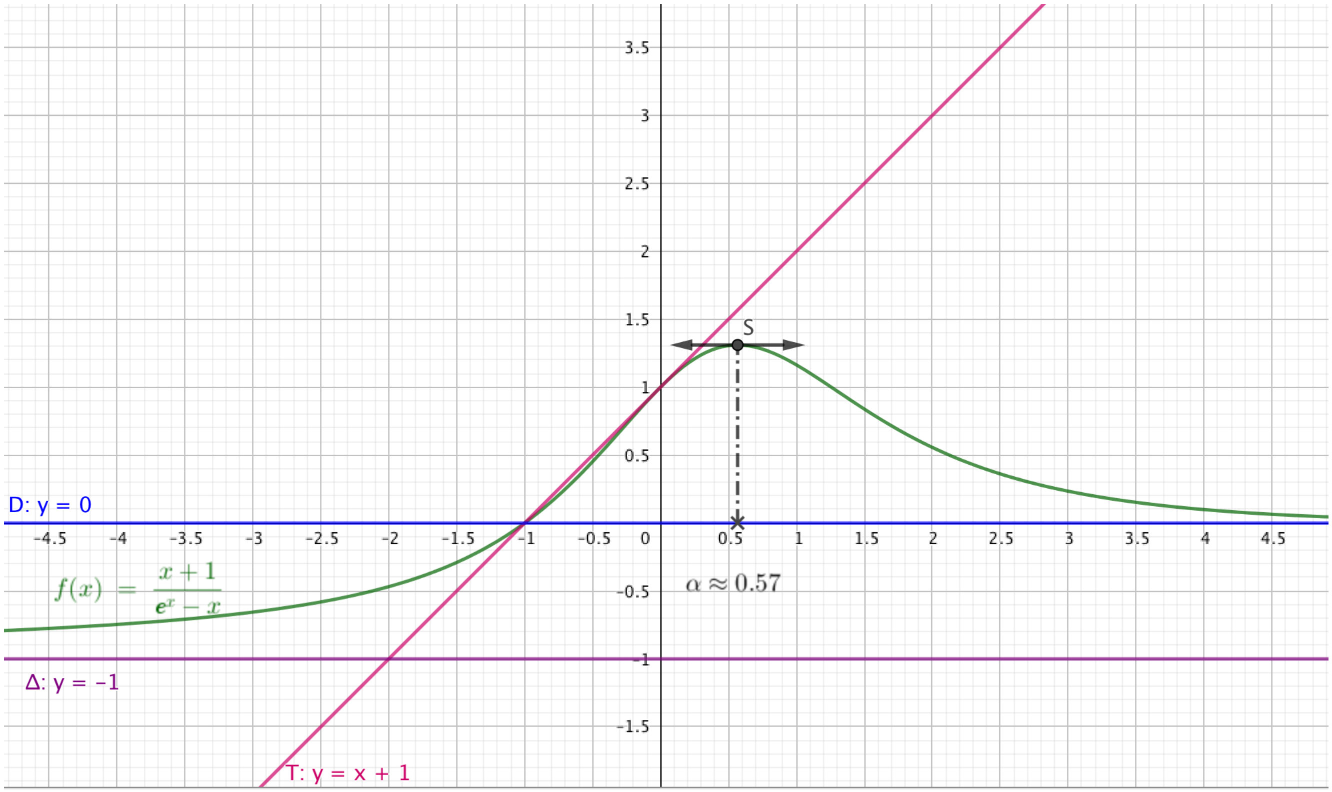
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

1 pt **5** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

- ✏ $f'(0) = -g(0) = 1$
- ✏ $f(0) = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 1(x-0)+1, \text{ soit } y = x+1}$$



D: y = 0
$f(x) = \dfrac{x+1}{e^x - x}$
S
$\alpha \approx 0.57$
Δ: y = −1
T: y = x + 1