Nom :	**DS 02**	TS3 — Oct 2018
Prénom :		*Devoir n° 6* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 4 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Une étude de fonction — 8,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 4$. et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1.5 pt **1** Calculer $f'(x)$ pour tout x réel.
En déduire l'étude du sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

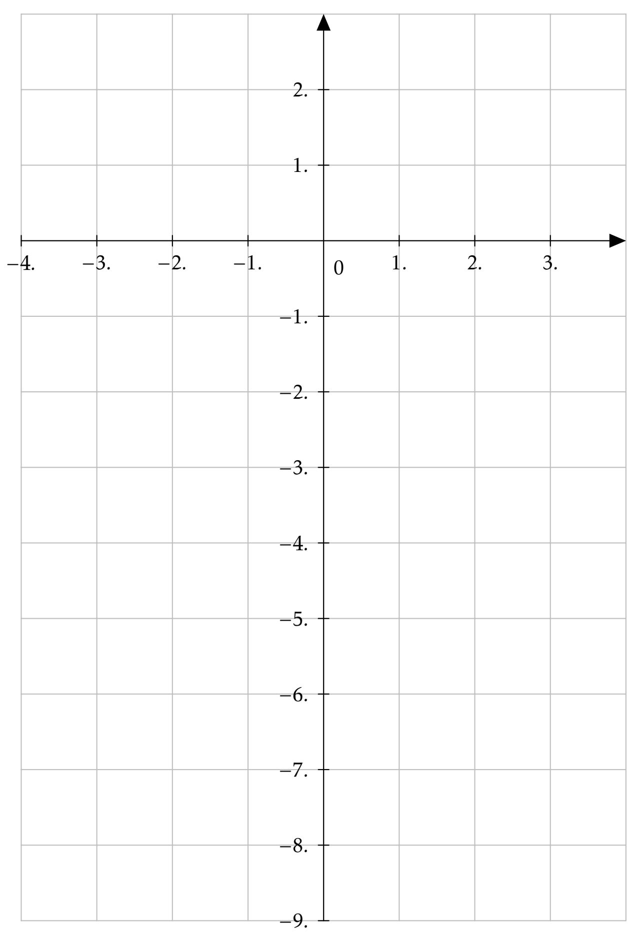
1.5 pt **2** Déterminer les coefficients des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives -2, 0 et 2.

1.5 pt **3** Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente T_0 au point d'abscisse 0.

1.5 pt **4** Tracer $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes horizontales et T_0 dans le repère proposé par l'énoncé.

2 pts **5** **a.** Démontrer que sur l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b.** Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.



Exercice 2 : Récurrence... 4 points

On note $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $S_n = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + n\times(n+2)$.
On peut aussi écrire que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)$$

0.5 pt **1** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+3)$

3 pts **2** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

0.5 pt **3** Calculer S_{100}

Exercice 3 qcm 5 points

5 pts Indiquer pour chaque affirmation suivante si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse est notée sur 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point ; si le total des points est négatif, la note est ramenée à 0.
Si toutes les réponses sont exactes à une question, un bonus de 0,5 point est alloué.

1 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

b. (v_n) est décroissante

c. (v_n) est géométrique

d. (u_n) et (v_n) sont croissantes.

2 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $2u_{n+1} = u_n - 1$ pour tout $n \geq 0$. La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n + 1$.

a. (v_n) est géométrique et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

c. $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 4 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d. $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

✂ ✂

Annexe pour le QCM

Nom , prénom : ....

	Affirmation a	Affirmation b	Affirmation c	Affirmation d	Bonus	Total
Question 1						
Question 2						

✂ ✂

Exercice 4 — 10,5 points

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0,3 \\ u_{n+1} & = & 0,9u_n(1-u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1 pt **1** Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2 On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$.

1 pt **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.

2.5 pts **b.** Montrer par récurence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

1 pt **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

1 pt **3** Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
Recopier et compléter l'algorithme où n désigne un entier et U désigne un réel, afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
U ← 0,3
n ← 0
tant que ······ faire
 |
 |
 |
fin
Afficher ······
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_{10} & = & 0,032 \\ v_{n+1} & = & 1,06v_n(1-v_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1 pt **1** Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

1.5 pt **2** On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$

1.5 pt **3** La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?