Nom :	Corrigé DS 02	TS3	Oct 2018
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 6	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 4 pages (recto-verso).

Exercice 1 : Une étude de fonction — 8,5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 4$. et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

1.5 pt **1** Calculer $f'(x)$ pour tout x réel.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty; +\infty[$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

- En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
- En $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

1.5 pt **2** Déterminer les coefficients des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives -2, 0 et 2.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur : $f'(a)$.

- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2 a pour coefficient directeur : $f'(-2) = 3((-2)^2 - 1) = 9$
- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur : $f'(0) = 3(0^2 - 1) = -3$
- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur : $f'(2) = 3(2^2 - 1) = 9$

$$\boxed{f'(-2) = 9; f'(0) = -3 \text{ et } f'(2) = 9.}$$

1.5 pt **3** Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente T_0 au point d'abscisse 0.
T_0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

- $f'(0) = -3$
- $f(0) = -4$

$$\boxed{T_0 \text{ a pour équation } y = -3(x-0) - 4, \text{ soit } y = -3x - 4}$$

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T_0 on forme $f(x)-g(x) = y_{\mathcal{C}_f} - y_{T_0}$, où $\mathcal{C}_f$ est la courbe d'équation $y = f(x)$ et T_0 la courbe d'équation $y = -3x-4$.

$$y_{\mathcal{C}_f} - y_{T_0} = x^3 - 3x - 4 - (-3x-4) = x^3$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f(x)-g(x) = y_{\mathcal{C}_f} - y_{T_0}$		$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathcal{C}_f$ en -dessous de T_0	$\mathcal{C}_f$ et T_0 ont un point commun	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de T_0	

1.5 pt **4** Tracer $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes horizontales et T_0 dans le repère proposé par l'énoncé.
Fait en fin d'exercice.

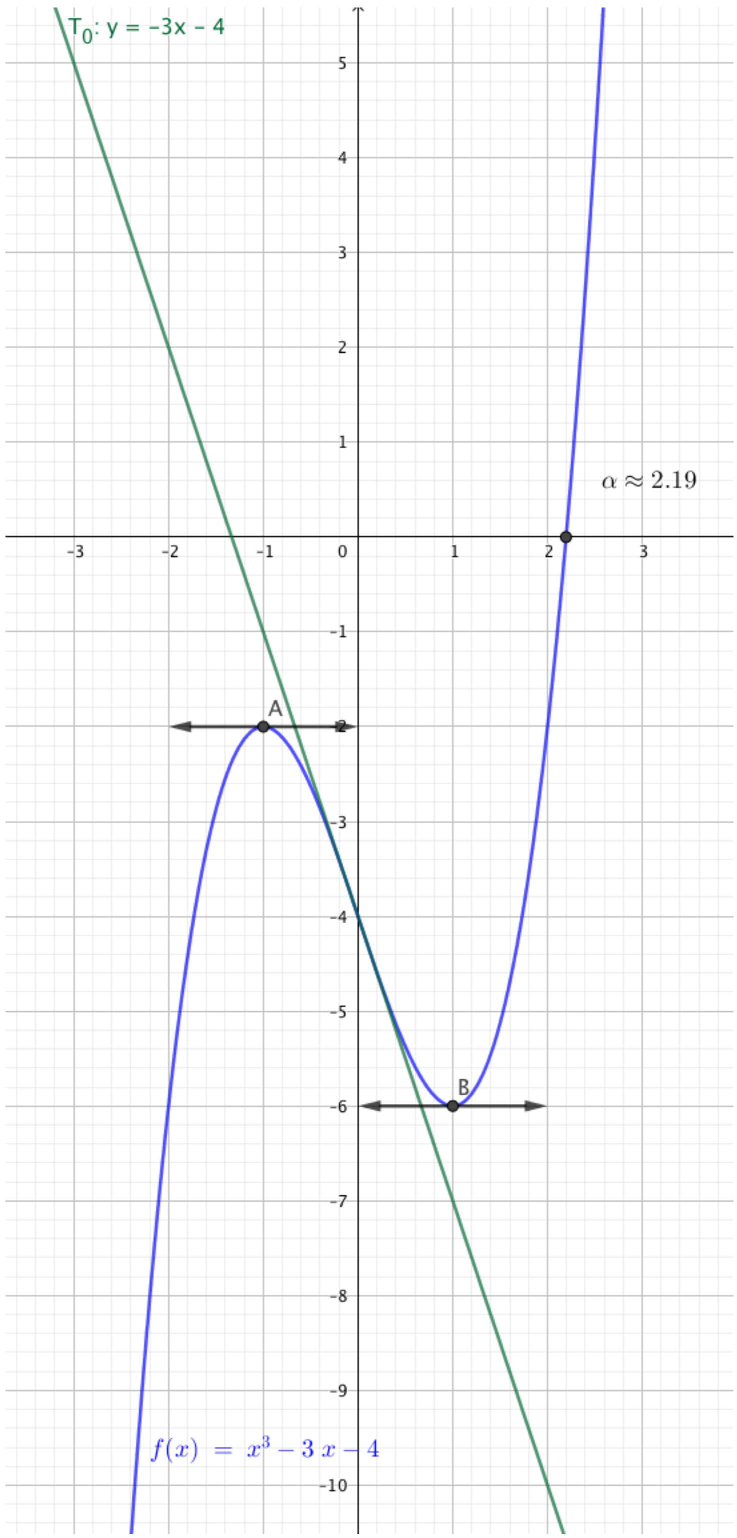
2 pts **5** **a.** Démontrer que sur l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

- Sur $]-\infty;1]$, f présente un maximum en -1 qui vaut $f(-1) = -2$.
  Ainsi pour tout réel $x \in]-\infty;1]$, on a $f(x) \leqslant -2 < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;1]$.
- Sur $[1;+\infty[$: D'après le théorème de la bijection :
  - ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [1;+\infty[$.
  - ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $I = [1;+\infty[$.
  - ✍ $f(1) = -6$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  - ✍ f réalise donc une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[-6;+\infty[$
    Comme $0 \in [-6;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[1;+\infty[$.

0.5 pt **b.** Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
Avec une calculatrice on obtient :

- $f(2,19) \approx -0,067$
- $f(2,20) \approx 0,048$

$$\boxed{2,19 < \alpha < 2,20}$$



Exercice 2 : Récurrence... 4 points

On note $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $S_n = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + n\times(n+2)$.
On peut aussi écrire que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)$$

0.5 pt **1** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+3)$
Comme S_n est la somme de n termes, S_{n+1} s'obtient en ajoutant le terme de rang $n+1$,
soit $(n+1)(n+1+2) = (n+1)(n+3)$.
Ainsi $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+3)$

3 pts **2** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

Notons $P(n)$ la propriété $1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$:

- ✏ Initialisation : $1\times 3 = 3$ et $\dfrac{1\times 2\times 9}{6} = \dfrac{18}{6} = 3$ donc $P(1)$ est vraie.
- ✏ Hérédité : Soit $p \geq 1$, on suppose que :

$$S_p = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots p(p+2) = \frac{p(p+1)(2p+7)}{6}\ (HR)$$

On doit prouver que :

$$S_{p+1} = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots + p(p+2) + (p+1)(p+3) = \frac{(p+1)(p+1+1)(2(p+1)+7)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+9)}{6}$$

En ajoutant $(p+1)(p+2)$ de part et d'autre dans (HR), on obtient :

$$S_{p+1} = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots p(p+2) + (p+1)(p+3)$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+7)}{6} + (p+1)(p+3)$$

En factorisant par $(p+1)$:

$$S_{p+1} = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots p(p+2) + (p+1)(p+3) = (p+1)\left[\frac{2p^2 + 7p + 6p + 18}{6}\right]$$

$$S_{p+1} = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots p(p+2) + (p+1)(p+3) = \frac{(p+1)(2p^2 + 13p + 18)}{6}$$

En développant $(p+2)(2p+9)$ on obtient $2p^2 + 4p + 9p + 18 = 2p^2 + 13p + 18$

$$S_{p+1} = 1\times 3 + 2\times 4 + 3\times 5 + \cdots p(p+2) + (p+1)(p+3) = \frac{(p+1)(p+2)(2p+9)}{6}$$

- ✏ Conclusion : Le principe de récurrence s'appliquant, on a pour tout entier $n \geq 1; S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

0.5 pt **3** Calculer S_{100}
$S_{100} = \dfrac{100(100+1)(2\times 100+7)}{6} = 348\,450$

$$\boxed{S_{100} = 348\,450}$$

Exercice 3 qcm — 5 points

5 pts Indiquer pour chaque affirmation suivante si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse est notée sur 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point ; si le total des points est négatif, la note est ramenée à 0.
Si toutes les réponses sont exactes à une question, un bonus de 0,5 point est alloué.

1 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $v_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ | b. (v_n) est décroissante
c. (v_n) est géométrique | d. (u_n) et (v_n) sont croissantes.

2 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $2u_{n+1} = u_n - 1$ pour tout $n \geq 0$. La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n + 1$.

a. (v_n) est géométrique et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

c. $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 4 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d. $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3 - 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

✂ ✂

Annexe pour le QCM

Nom , prénom : ....

	Affirmation a	Affirmation b	Affirmation c	Affirmation d	Bonus	Total
Question 1	VRAI	FAUX	FAUX	FAUX	0,5	2,5
Question 2	VRAI	FAUX	VRAI	FAUX	0,5	2,5

✂ ✂

Exercice 4 — *10,5 points*

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,3 \\ u_{n+1} &= 0,9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1 pt **1** Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

$u_1 = 0,9u_0(1-u_0) = 0,9 \times 0,3 \times (1-0,3) = 0,189$;

le nombre de tortues en 2001 est 189.

$u_2 = 0,9u_1(1-u_1) = 0,9 \times 0,189 \times (1-0,189) \approx 0,138$;

le nombre de tortues en 2002 est 138.

2 On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0 ; 1]$.

1 pt **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.

On sait que

$$0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$$

on multiplie les trois membres de cette inégalité par le nombre u_n de l'intervalle $[0\,;\,1]$, donc qui est positif ou nul :

$$0 \leqslant u_n(1-u_n) \leqslant u_n$$

D'où on déduit en multipliant par $0,9 > 0$ l'inégalité

$$0 \leqslant 0,9u_n(1-u_n) \leqslant 0,9u_n$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n, \text{ pour tout } n$$

2.5 pts **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.
On sait que, pour tout n, $u_n \in [0\,;\,1]$; donc $u_n \geqslant 0$.
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$: $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ donc $u_0 \leqslant 0,3 \times 0,9^0$.
  La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité**
  On suppose que, pour $k \geqslant 0$, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \leqslant 0,3 \times 0,9^k$. On va démontrer qu'elle est vraie au rang $k+1$.
  D'après la question précédente : $u_{k+1} \leqslant 0,9u_k$.
  D'après l'hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant 0,3 \times 0,9^k$.
  On déduit : $u_{k+1} \leqslant 0,9 \times 0,3 \times 0,9^k$ c'est-à-dire : $u_{k+1} \leqslant 0,3 \times 0,9^{k+1}$.
  Donc la propriété est vraie au rang $k+1$ donc elle est héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, on peut donc dire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout n, $u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$, et on a donc par conséquence : $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

1 pt **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
$-1 < 0,9 < 1$ donc la suite géométrique $(0,9^n)$ a pour limite 0 ;
on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$.
On sait que, pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.}$$

$$\boxed{\text{Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.}}$$

1 pt **3** Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
Recopier et compléter l'algorithme où n désigne un entier et U désigne un réel, afin qu'il satisfasse cette exigence.

```
U ← 0,3
n ← 0
tant que  U ⩾ 0,03 faire
    n ← n + 1
    U ← 0,9U(1 − U)
fin
Afficher 2000 + (n − 1)
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} &= 0,032 \\ v_{n+1} &= 1,06v_n(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1 pt **1** Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

$v_{11} = 1,06v_{10}(1-v_{10}) = 1,06 \times 0,032(1-0,032) \approx 0,033$;

il y aura donc 33 tortues en 2011.

$v_{12} = 1,06v_{11}(1-v_{11}) = 1,06 \times 0,033(1-0,033) \approx 0,034$;

il y aura donc 34 tortues en 2012.

1.5 pt **2** On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1-\ell).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-v_n) = 1-\ell$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,06v_n(1-v_n) = 1,06\ell(1-\ell)$.
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
Comme $v_{n+1} = 1,06v_n(1-v_n)$, d'après l'unicité de la limite, on peut dire que
$\ell = 1,06\ell(1-\ell)$.

1.5 pt **3** La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

La suite (v_n) est croissante et $v_{10} = 0,032$ ce qui signifie qu'il y a a 32 tortues en 2010.
Donc, pour tout $n \geqslant 10$, $v_n \geqslant v_0$ autrement dit $v_n \geqslant 0,032$.
Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction.