

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 *6,5 points*

- 1** Suite arithmétique :
- 2 pts **a.** Calculer la somme $S = 24 + 33 + 42 + 51 + \dots + 933$
- 2 pts **b.** (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$, par ailleurs $u_5 = 0$.
Calculer la raison r de la suite et exprimer u_n en fonction de n . Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- 2** Suite géométrique :
- 1.5 pt **a.** Calculer la somme : $T = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$
- 1 pt **b.** On considère (v_n) définie par $v_n = \frac{3^{n+1}}{5^n}$. Calculer v_0 , (v_n) est-elle géométrique ? Si oui préciser sa raison.

Exercice 2 : Récurrence... *5 points*

- 2.5 pts **1** Montrer par récurrence sur $n \geq 1$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- 2.5 pts **2** Montrer par récurrence sur $n \geq 3$: $3^n \geq n^2$

Exercice 3 *4 points*

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^3 - n}{n + 2}$

- 2 pts **1** Étudier le sens de variation de (u_n) .
- 0.5 pt **2** Prouver que (u_n) est minorée par 0.
- 1.5 pt **3** Vérifier que pour tout entier n on a $u_n = n^2 - 2n + 3 - \frac{6}{n+2}$.
En déduire que (u_n) n'est pas majorée.

Exercice 4 : Placement... *7,5 points*

- 1** Un capital initial c_0 de 600 euros est placé sur un compte rapportant 5% d'intérêts annuels. On note c_n le capital acquis au bout de n années (n entier naturel).
- 0.5 pt **a.** Montrer que le capital c_{n+1} est égal à $1,05c_n$.
- 0.5 pt **b.** En déduire l'expression de c_n en fonction de n .
- 1 pt **c.** Trouver (à la calculatrice) le nombre minimal d'années nécessaires pour que le capital ainsi placé ait au moins triplé.

- 2** Un autre épargnant place également un capital initial de 600 euros au taux annuel de 5 % d'intérêts, et fait un versement supplémentaire de 150 euros à la fin de chaque année. On appelle d_0 le capital initial et d_n le capital ainsi acquis à la fin de la n -ième année.
- 1.5 pt **a.** Calculer d_1, d_2, d_3 .
- 0.5 pt **b.** Vérifier que pour tout entier naturel n , $d_{n+1} = 1,05d_n + 150$.
- 1 pt **c.** Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = d_n + 3000$.
Calculer v_0 et v_1 .
- 1 pt **d.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$.
- 0.5 pt **e.** Écrire v_n en fonction de v_0 et de n .
- 0.5 pt **f.** En déduire d_n en fonction de n .
- 0.5 pt **g.** En utilisant la calculatrice, trouver à partir de combien d'années le capital d_n aura-t-il au moins triplé?

 **Exercice 5**

4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

- 1 pt **1** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2.5 pts **2** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
- 0.5 pt **3** Démontrer que la suite (n^2) n'est pas majorée.
Les questions suivantes pourront être abordées pour obtenir des points Bonus.
- 4** En déduire que (u_n) n'est pas majorée puis déterminer la limite de la suite (u_n) . (on précisera le théorème utilisé!)
- 5** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
- 6** Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .