Nom :	DS 01 Correction	TS3 — Sept 2018
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 3 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1 — 6,5 points

1 Suite arithmétique :

2 pts **a.** Calculer la somme $S = 24 + 33 + 42 + 51 + .. + 933$.
On reconnaît ici la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 9$ de premier terme $u_1 = 24$ et de dernier terme $u_n = 933$.

D'après le cours, on a $u_n = u_1 + (n-1)r$, soit $933 = 24 + 9(n-1)$ ce qui fournit $n - 1 = \dfrac{933 - 24}{9} = 101$ et donc $n = 102$.

Cette somme a donc 102 termes ; et $S = \dfrac{N(P+D)}{2}$ où N est le nombre de termes, P le premier terme et D le dernier.

$$\boxed{\text{Ainsi } S = \frac{102(24+933)}{2} = 48\,807.}$$

2 pts **b.** (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$, par ailleurs $u_5 = 0$.
Calculer la raison r de la suite et exprimer u_n en fonction de n. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

$u_5 = u_0 + 5r$
$10 + 5r = 0 \Leftrightarrow r = -2$.
Comme $u_n = u_0 + nr$ on déduit $u_n = 10 - 2n$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } r = -2 \text{ et } u_n = 10 - 2n.}$$

$$\begin{aligned} S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= \frac{N(P+D)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(10+10-2n)}{2} \\ &= (n+1)(10-n) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)(10-n)}$$

2 Suite géométrique :

1.5 pt **a.** Calculer la somme : $T = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10}$ On reconnaît ici la somme de termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 de raison $-\dfrac{1}{3}$. On fait apparaître son nombre de termes en écrivant :

$$T = \underbrace{1}_{1 \text{ terme}} + \underbrace{\left(\frac{-1}{3}\right)^1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \left(\frac{-1}{3}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{-1}{3}\right)^{10}}_{10 \text{ termes}}.$$

On a ainsi montré que T contient 11 termes.D'après le cours
$T = \dfrac{1-\text{raison}^{\text{Nombres de termes}}}{1-\text{raison}} \times$ Premier terme.

Ainsi $T = \dfrac{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{11}}{1-\left(\dfrac{-1}{3}\right)} \times 1 = \left(1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}\right) \times 1 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4} \times \left[1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{11}\right]$

$$\boxed{T = \frac{3}{4} \times \left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right] = \frac{44\,287}{59\,049}}$$

1 pt **b.** On considère (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^n}$. Calculer v_0, (v_n) est-elle géométrique ? Si oui préciser sa raison.

$v_0 = \dfrac{3^1}{5^0} = 3$

On forme $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{3^{n+1+1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{3^{n+1}}{5^n}} = \dfrac{3^{n+2}}{5^{n+1}} \times \dfrac{5^n}{3^{n+1}} = \dfrac{3^{n+2-n-1}}{5^{n+1-n}} = \dfrac{3}{5}$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{3}{5}.}$$

Exercice 2 : Récurrence... 5 points

2.5 pts **1** Montrer par récurrence sur $n \geq 1$: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Notons $P(n)$ la propriété $S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

- Initialisation : $1^2 = 1$ et $\dfrac{1\times 2\times 3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $p \geq 1$, on suppose que :

$$S_p = 1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \; (HR)$$

On doit prouver que :

$$S_{p+1} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

En ajoutant $(p+1)^2$ de part et d'autre dans (HR), on obtient :

$$S_{p+1} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2$$

En factorisant par $(p+1)$:

$$S_{p+1} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2 = (p+1)\left[\frac{p(2p+1)}{6} + (p+1)\right]$$

$$S_{p+1} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2 = \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$$

En développant $(p+2)(2p+3)$ on obtient $2p^2+3p+4p+6 = 2p^2+7p+6$

$$S_{p+1} = 1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+(p+1)^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

✏ Conclusion : Le principe de récurrence s'appliquant, on a pour tout entier $n \geq 1; S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.5 pts **2** Montrer par récurrence sur $n \geq 3$: $3^n \geq n^2$

Notons $R(n)$ la propriété $3^n \geq (n+2)^2$:

✏ Initialisation :Au rang 3 ; on a $3^3 = 27$ et $(3+2)^2 = 5^2 = 25$; comme $27 \geq 25$, $R(3)$ est vraie.

✏ Hérédité :Soit $p \geq 3$, on suppose que : $3^p \geq (p+2)^2$

On doit prouver que : $3^{p+1} \geq (p+3)^2$

En multipliant par 3 de part et d'autre dans (HR), on obtient :

$3 \times 3^p \geq 3(p+2)^2$ soit $3 \times 3^{p+1} \geq 3(p+2)^2$

Il reste à voir que si $p \geq 3$ alors on a $3(p+2)^2 \geq (p+3)^2$

$$\begin{aligned} 3(p+2)^2 \geq (p+3)^2 \quad &\Leftrightarrow 3(p^2+4p+4) \geq p^2+6p+9 \\ &\Leftrightarrow 2p^2+6p+3 \geq 0 \end{aligned}$$

Comme ici p est un entier strictement positif, on a clairement $2p^2 > 0; 6p > 0; 3 > 0$;

Par somme on obtient $2p^2 + 6p + 3 > 0 \geq 0$

Ainsi $3(p+2)^2 \geq (p+3)^2$

Comme $3^{p+1} \geq (p+3)^2$ et $3(p+2)^2 \geq (p+3)^2$ on déduit $3^{p+1} \geq (p+3)^2$

✏ Conclusion :Le principe de récurrence s'appliquant, on a :

pour tout $n \geq 3$; $3^n \geq (n+2)^2$

Exercice 3 — *4 points*

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^3 - n}{n+2}$

2 pts **1** Étudier le sens de variation de (u_n).

On forme $u_{n+1} - u_n$ et on étudie son signe ;

déjà $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)^2 + 3(n+1) - 1}{(n+1)+2} = \dfrac{2n^2+7n+4}{n+3}$.

Alors $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n^2+7n+4}{n+3} - \dfrac{2n^2+3n-1}{n+2} = \dfrac{(n+2)(2n^2+7n+4)}{(n+2)(n+3)} - \dfrac{(2n^2+3n-1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2+10n+11}{(n+2)(n+3)}$$

On a comme $n \in \mathbb{N}; n \geq 0$, donc $n+2 \geq 2 > 0$ et $n+3 \geq 3 > 0$; par produit $(n+2)(n+3) > 0$.

De la même façon on a comme $n \geq 0; 2n^2 + 10n + 11 > 0$

Ayant pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$,

On a montré que la suite (u_n) est strictement croissante.

0.5 pt **2** Prouver que (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) étant strictement croissante, on a si $n \geq 0$ alors $u_n \geq u_0$. Comme $u_0 = \dfrac{0}{2}$.

Pour tout entier $n; u_n \geq 0$.

Ainsi(u_n) est minorée par 0.

1.5 pt **3** Vérifier que pour tout entier n on a $u_n = n^2 - 2n + 3 - \dfrac{6}{n+2}$.

En déduire que (u_n) n'est pas pas majorée.

En réduisant au même dénominateur, il vient :

$$\begin{aligned} n^2-2n+3-\frac{6}{n+2} &= \frac{(n^2-2n+3)(n+2)}{n+2}-\frac{6}{n+2}\\ &= \frac{(n^2-2n+3)(n+2)-6}{n+2}\\ & \frac{n^3-2n^2+3n+2n^2-4n+6-6}{n+2}\\ &= \frac{n^3-2n^2+3n+2n^2-4n+6-6}{n+2}\\ &= u_n \end{aligned}$$

$u_n=n^2-2n+3-\dfrac{6}{n+2}$.

$$\boxed{u_n=n^2-2n+3-\frac{6}{n+2}}$$

En déduire que (u_n) n'est pas pas majorée.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-2n+3=\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6}{n+2}=0$; par somme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
La suite (u_n) divergeant vers $+\infty$; elle n'est pas majorée.

Exercice 4 : Placement... 7,5 points

1 Un capital initial c_0 de 600 euros est placé sur un compte rapportant 5 % d'intérêts annuels. On note c_n le capital acquis au bout de n années (n entier naturel).

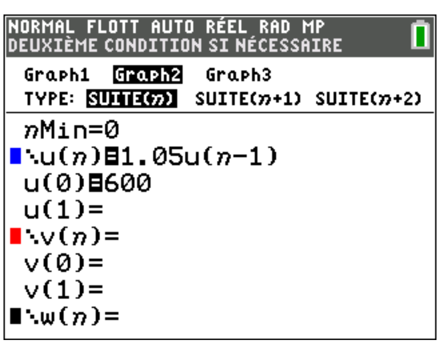
0.5 pt **a.** Montrer que le capital c_{n+1} est égal à $1,05c_n$.

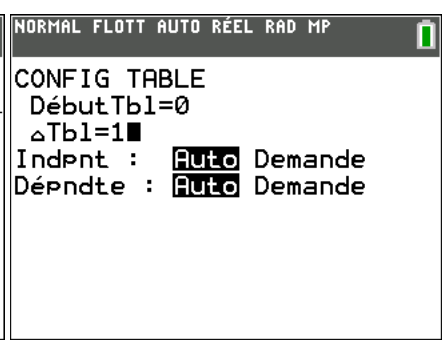
$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n+5\,\%c_n\\ &= c_n+0,05c_n\\ &= 1,05C_n \end{aligned}$$

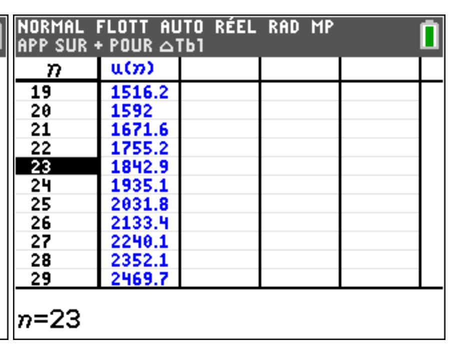
0.5 pt **b.** En déduire l'expression de c_n en fonction de n.
Comme pour tout entier n on a $c_{n+1}=1,05c_n$, on déduit que la suite (c_n) est géométrique de raison 1,05.
D'après le cours sur les suites géométriques $c_n=q^n\times c_0$, ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\ c_n=1,05^n\times 600.}$$

1 pt **c.** Trouver (à la calculatrice) le nombre minimal d'années nécessaires pour que le capital ainsi placé ait au moins triplé.







$$\boxed{\text{Le capital } c_n \text{ aisi placé aura triplé au bout de 23 ans.}}$$

2 Un autre épargnant place également un capital initial de 600 euros au taux annuel de 5 % d'intérêts, et fait un versement supplémentaire de 150 euros à la fin de chaque année. On appelle d_0 le capital initial et d_n le capital ainsi acquis à la fin de la n-ième année.

1.5 pt **a.** Calculer d_1, d_2, d_3.

- ☐ $d_1 = 1,05d_0 + 150 = 1,05 \times 600 + 150 = 780$.
- ☐ $d_2 = 1,05d_1 + 150 = 1,05 \times 780 + 150 = 969$.
- ☐ $d_3 = 1,05d_2 + 150 = 1,05 \times 969 + 150 = 1\,167,5$.

$$\boxed{d_1 = 780, d_2 = 969 \text{ et } d_3 = 1\,167,5.}$$

0.5 pt **b.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $d_{n+1} = 1,05d_n + 150$.

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + 5\,\%d_n + 150 \quad && +5\,\%d_n \text{ car le placement est au taux annuel de } 5\,\% \text{ d'intérêts} \\ & && +150 \text{ car on fait un versement supplémentaire de 150 euros à la fin de chaque année} \\ &= 1,05d_n + 150 \end{aligned}$$

1 pt **c.** Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = d_n + 3000$.
Calculer v_0 et v_1.

- ☐ $v_0 = d_0 + 3000 = 600 + 3000 = 3600$.
- ☐ $v_1 = d_1 + 3000 = 780 + 3000 = 3780$.

$$\boxed{v_0 = 3600 \text{ et } v_1 = 3\,780.}$$

1 pt **d.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= d_{n+1} + 3000 \\ &= 1,05d_n + 150 + 3000 \\ &= 1,05d_n + 3150 \\ &= 1,05(d_n + 3000) \text{ car } 1,05 \times 3000 = 3150 \\ &= 1,05v_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ v_{n+1} = 1,05v_n, \text{ la suite } (v_n) \text{ est donc géométrique de raison } q = 1,05.}$$

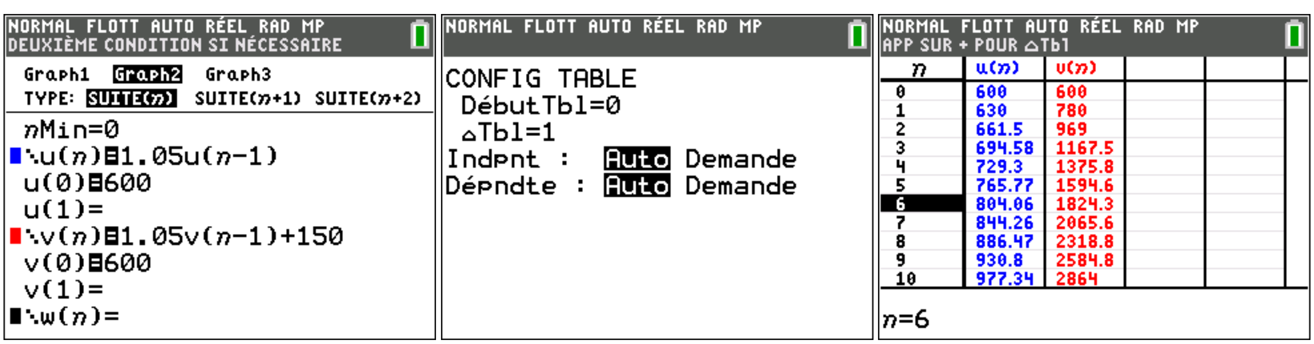
0.5 pt **e.** Écrire v_n en fonction de v_0 et de n.
Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$, on déduit $v_n = q^n \times v_0 = 1,05^n \times 3600$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ v_n = 3600 \times 1,05^n.}$$

0.5 pt **f.** En déduire d_n en fonction de n.
Comme $v_n = d_n + 3000$ on déduit $d_n = v_n - 3000 = 3600 \times 1,05^n - 3000$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ d_n = 3600 \times 1,05^n - 3000.}$$

0.5 pt **g.** En utilisant la calculatrice, trouver à partir de combien d'années le capital d_n aura-t-il au moins triplé ?



$$\boxed{\text{Le capital } d_n \text{ aisi placé aura triplé au bout de 6 ans.}}$$

Exercice 5 — 4 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1 pt **1** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
Comme, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout entier n, on a $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$.
Or ici n est un entier naturel, donc $n \geq 0$, puis $2n \geq 0$, et donc $2n + 3 \geq 3 > 0$.
Ainsi pour tout entier n, on a $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

2.5 pts **2** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
On note $T(n)$ la propriété $u_n > n^2$.

- Initialisation :Au rang 0 $u_0 = 1$, on a bien $1 > 0^2$, donc $T(0)$ est vraie
- Hérédité :Soit $p \geq 0$, on suppose que $u_p > p^2$.
  En utilisant $u_{p+1} = u_p + 2p + 3$ et $u_p > p^2$ on obtient $u_{p+1} > p^2 + 2p + 3$
  Or $p^2 + 2p + 3 > p^2 + 2p + 1$ et $p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$, ainsi $u_{p+1} > (p+1)^2$
- Conclusion :Le principe de récurrence s'appliquant, on a :
  pour tout $n \geq 0$; $u_n > n^2$.

0.5 pt **3** Démontrer que la suite $\left(n^2\right)$ n'est pas majorée.
On raisonne par l'absurde .
Si la suite $\left(n^2\right)$ est majorée, alors il réel A tel que pour tout entier n, on a : $n^2 \leq A$, donc :
pour tout entier n, on a : $n \leq \sqrt{A}$, ce qui est clairement absurde ! L'entier $E\left(\sqrt{A}\right) + 1$ est plus grand que $\sqrt{A}$...

$$\boxed{\text{la suite } \left(n^2\right) \text{ n'est donc pas majorée.}}$$

Les questions suivantes pourront être abordées pour obtenir des points Bonus.

4 En déduire que (u_n) n'est pas majorée puis déterminer la limite de la suite (u_n). (on précisera le théorème utilisé !)
Comme $u_n > n^2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de minoration.

5 Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.

- $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$.
- $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 5 = 9$.
- $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 7 = 16$.

$$\boxed{u_1 = 4, u_2 = 9 \text{ et } u_3 = 16.}$$

6 Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

$$\boxed{\text{On conjecture } u_n = (n+1)^2.}$$