Lycée l'Oiselet **Mardi 5 Février 2019**

BACCALAURÉAT BLANC 2019
DE MATHÉMATIQUES
– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : Sciences Physiques , SVT, ISN ou Sciences de l'Ingénieur.*
- *votre classe : Terminale S1 ou Terminale S2 ou …*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages.

Aucun document n'est autorisé. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1

Commun à tous les candidats **4 points**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

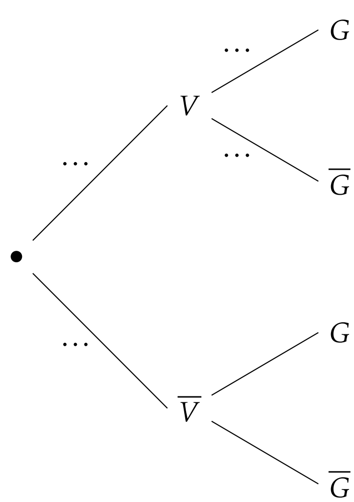
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1 **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.

b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2 Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3 La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
   a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

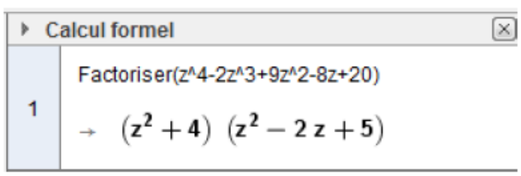
Exercice 2

Commun à tous les candidats **4 points**

Partie A

Soit P le polynôme de degré 4 défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 2z^3 + 9z^2 - 8z + 20$.

1. Calculer $P(2i)$ et $P(-2i)$.
2. Un logiciel de calcul formel a fourni le résultat suivant :



   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i; z_B = 1 - 2i; z_J = 2i$ et $z_K = \overline{z_J}$.

1. Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point B par rapport au point K. Montrer que l'affixe du point L est $z_L = -1 - 2i$.
3. Calculer $z_K - z_A$ et $z_L - z_J$et en déduire la nature du quadrilatère $AJLK$.
4. **a.** Déterminer l'affixe du point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GL} = \vec{0}$.
   b. A, G, L sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 3

Commun à tous les candidats **7 points**

Calcul de la distance de la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ à un point.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.On note $\mathcal{C}_{\exp}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle fournie en annexe page 6.

L'objectif du problème est de déterminer la distance de la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ au point O, c'est-à-dire la valeur minimale de OM lorsque M parcourt $\mathcal{C}_{\exp}$.

1 *Conjectures*

On note A le point de la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ le plus proche de O. Représenter approximativement A, le segment $[OA]$ et la tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ en A. Émettre trois conjectures :

(a) sur l'abscisse de A,

(b) sur la distance de O à $\mathcal{C}_{\exp}$ à 0,1 près

(c) sur (OA) et la tangente en A à $\mathcal{C}_{\exp}$.

2 *Étude de l'équation (E) : $x+e^{2x}=0$*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $g(x)=x+\mathrm{e}^{2x}$.

a. Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Calculer $g'(x)$ et étudier le signe de $g'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations complet de g.

d. Montrer que l'équation (E) admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

e. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

f. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

3 *Variations de la fonction distance*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=OM^2$ où M est le point de $C_{\exp}$ d'abscisse x réel quelconque.

a. Vérifier que pour tout réel x on a $f(x)=x^2+\mathrm{e}^{2x}$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
En déduire le tableau de variation de f.
(on ne demande pas le calcul des limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$.)

d. En déduire que f admet un minimum en α égal à $\alpha^2-\alpha$.

e. En déduire un encadrement de la distance minimale entre le point O et un point de la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$.

f. Valider ou infirmer les conjectures (a) et (b) de la question 1).

4 *Avec la tangente .*

Soit x réel et $M(x;\mathrm{e}^x)\in\mathcal{C}_{\exp}$. Soit A le point de $\mathcal{C}_{\exp}$ d'abscisse α définie à la question 2).

a. Donner, en fonction de α, l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_{\exp}$ au point $A(\alpha;\mathrm{e}^{\alpha})$.

b. Montrer que $\mathcal{T}$ coupe l'axe des abscisses au point $B(\alpha-1;0)$.

c. Exprimer, en fonction de α, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BA}$.

d. Montrer que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BA}=g(\alpha)$ et valider la conjecture (c) de la question 1).

Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   a. Justifier que g est croissante sur $[0\,;\,60]$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.
   c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   d. En déduire la convergence de la suite (u_n).
   e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme suivant où n désigne un entier naturel et u un nombre réel.

```
n ← 0
u ← 12
tant que ········· faire
    u ← ···
    n ← ···
fin
Afficher ···
```

   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

Prénom, Nom et Classe :

Annexe de l' exercice 3